



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE INGENIERÍA, ARQUITECTURA Y DISEÑO



CUADERNO DE APUNTES

MATERIA

ANÁLISIS ESTRUCTURAL

ELABORADO POR:

M.I. JOEL MELCHOR OJEDA RUIZ

M.C. ALBERTO PARRA MEZA

M.I. RICARDO SÁNCHEZ VERGARA

Ensenada, Baja California.

CONTENIDO

- 1. CONDICIONES DE EQUILIBRIO**
- 2. DIAGRAMAS DE FUERZA CORTANTE, MOMENTO FLEXIONANTE Y FUERZA AXIAL**
- 3. METODO: ECUACION DE TRES MOMENTO**
 - a. Descripción del método
 - b. Ecuación de tres momentos
 - c. Ejercicios de aplicación en vigas continuas
- 4. METODO: TRABAJO VIRTUAL**
 - a. Descripción del método
 - b. Ecuación para determinar desplazamientos: rotación, desplazamientos horizontal y vertical
 - c. Ejercicios de aplicación en armaduras isostáticas
 - d. Ejercicios de aplicación en vigas isostáticas
 - e. Ejercicios de aplicación en marcos isostáticas
- 5. METODO: DE LAS FUERZAS (FLEXIBILIDADES)**
 - a. Ejercicios de aplicación en vigas hiperestáticas
 - b. Ejercicios de aplicación en armaduras hiperestáticas
 - c. Ejercicios de aplicación en marcos hiperestáticas
- 6. METODO: PENDIENTE - DEFLEXIÓN**
 - a. Descripción del método
 - b. Ecuaciones del método
 - c. Ejercicios de aplicación en vigas hiperestáticas
 - d. Ejercicios de aplicación en marcos hiperestáticas sin desplazamiento de traslación en los nodos
 - e. Ejercicios de aplicación en marcos hiperestáticas con desplazamiento de traslación en los nodos
- 7. METODO: RIGIDECES (PLANTEAMIENTO CONVENCIONAL)**
 - a. Descripción del método
 - b. Ecuaciones del método

- c. Ejercicio de aplicación en marco hiperestático con desplazamiento de traslación en los nodos

8. METODO: MATRICIAL DE RIGIDECES

- a. Descripción del método
- b. Ecuaciones del método
- c. Ejercicio de aplicación en marcos hiperestáticos con desplazamiento de traslación en los nodos

ANALISIS ESTRUCTURAL.

INTRODUCCION

El análisis estructural consiste en la determinación del efecto de las acciones sobre la totalidad o parte de la estructura, con objeto de efectuar las comprobaciones de los Estados Límites Últimos y de Servicio. Dicho análisis debe realizarse, para las diferentes situaciones del proyecto, mediante modelos estructurales adecuados que consideren la influencia de todas las variables que sean relevantes.

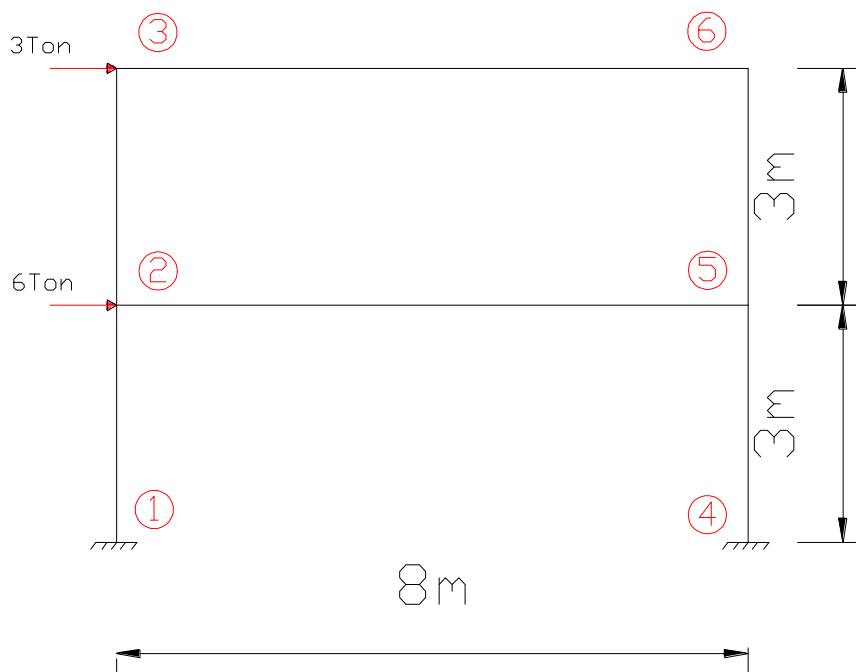
DESCRIPCION GENERAL.

El análisis estructural proporciona resultados a nivel global (reacciones, desplazamientos) y a nivel seccional (esfuerzos, curvaturas, elongaciones). Debe servir, también, para determinar el comportamiento a nivel local (tensiones, deformaciones) de aquellas zonas singulares en las que las hipótesis clásicas de la resistencia de materiales no sean aplicables: zonas locales próximas a cargas concentradas, nudos, cambios bruscos de sección, etc.

El análisis estructural debe adoptar, en cada caso, los modelos e hipótesis fundamentales de cálculo apropiados para aproximar el comportamiento real de las estructuras con la precisión necesaria para asegurar la no superación del estado límite considerado.

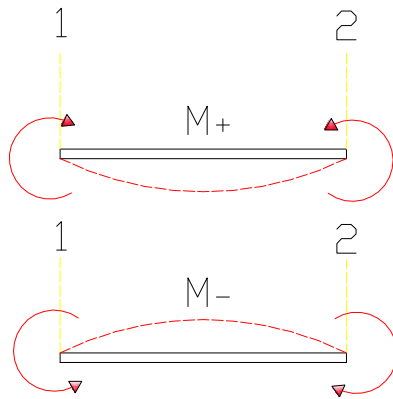
EJEMPLO 1.

Considérese el siguiente marco bajo las fuerzas actuantes y el valor de los momentos en los extremos de los elementos que conforman la estructura.



En base a los resultados del análisis estructural es posible descomponer el marco en sus elementos estructurales y así obtener elementos mecánicos para un diseño posterior de la estructura.

Los siguientes momentos siguen la siguiente convension:



$$M_{1-2} = 8.014 \text{ Ton} * m$$

$$M_{4-5} = 8.014 \text{ Ton} * m$$

$$M_{2-1} = 5.4867 \text{ Ton} * m$$

$$M_{5-4} = 5.4867 \text{ Ton} * m$$

$$M_{2-3} = 1.626 \text{ Ton} * m$$

$$M_{5-6} = 1.626 \text{ Ton} * m$$

$$M_{3-2} = 2.876 \text{ Ton} * m$$

$$M_{6-5} = 2.876 \text{ Ton} * m$$

$$M_{3-4} = 2.876 \text{ Ton} * m$$

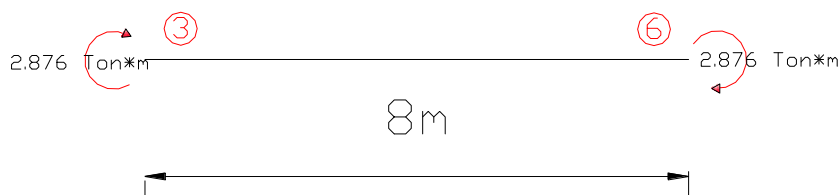
$$M_{4-3} = 2.876 \text{ Ton} * m$$

$$M_{2-5} = 7.11 \text{ Ton} * m$$

$$M_{5-2} = 7.11 \text{ Ton} * m$$

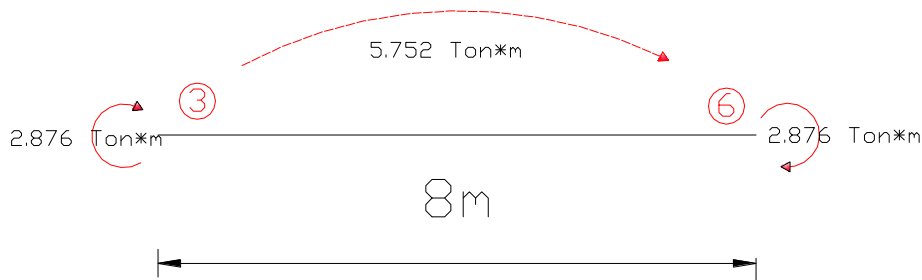
Los momentos anteriores, representan los momentos internos en cada barra ocasionados por la acción de las dos fuerzas exteriores, en base a estos momentos es posible determinar diagramas de Fuerza Cortante, Momento flexionante y fuerza axial. (V_x , M_x y N_x) Asi como las fuerzas internas en cada Nodo.

Para la Viga 3-6:



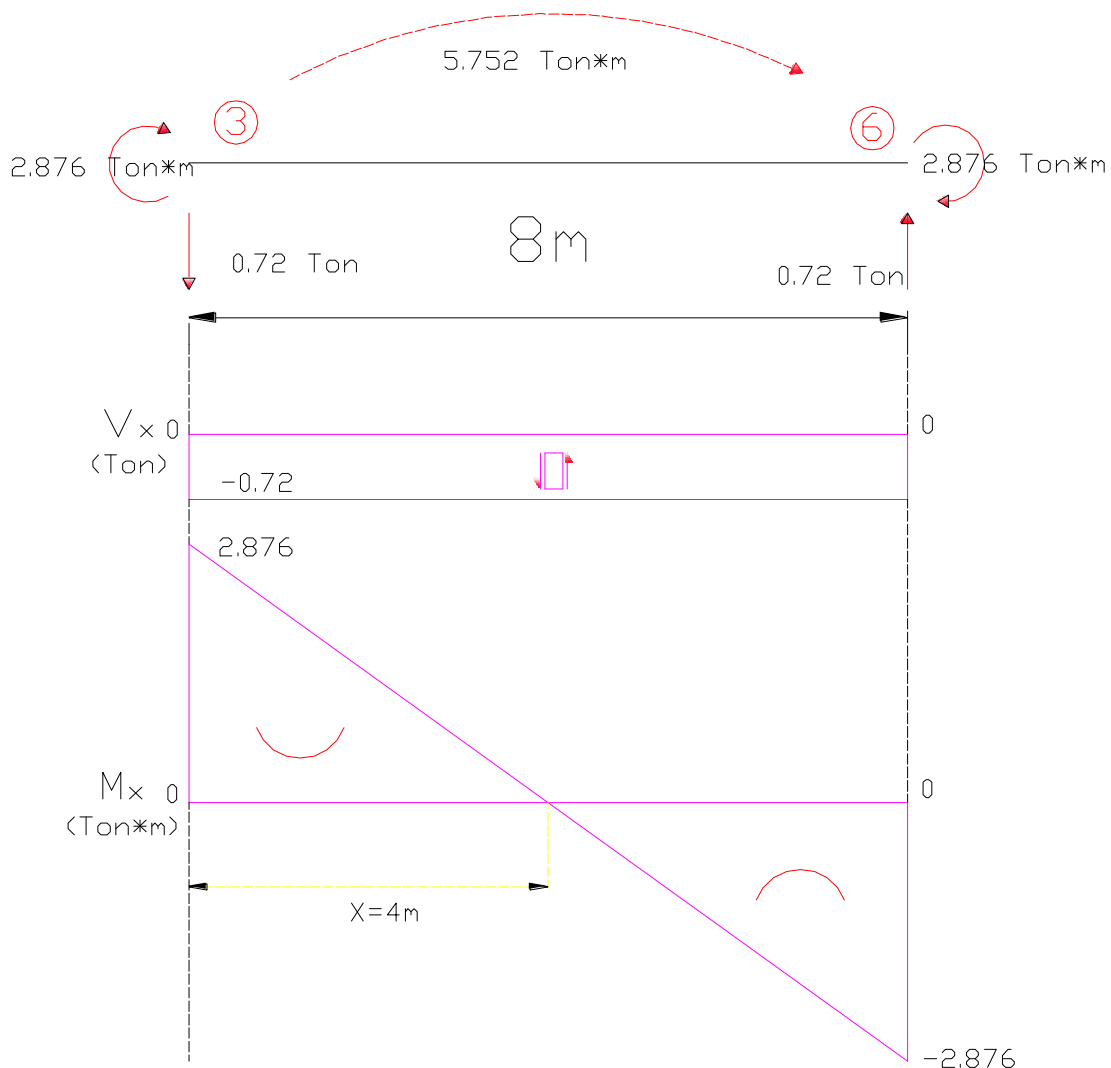
Se procede a sumar los momentos en los extremos de la barra:

$$2.876 \text{ ton}\cdot\text{m} + 2.876 \text{ ton}\cdot\text{m} = 5.752 \text{ Ton}\cdot\text{m}$$

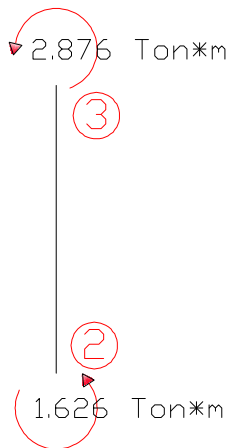


Para obtener las reacciones en los extremos de la barra se supone que esta debe estar en equilibrio, así que debe haber un par de fuerzas que aplicadas en los extremos que generen un momento de igual magnitud pero en sentido contrario al que se obtuvo por la suma de momentos. Para ello se divide la magnitud del momento entre la longitud de la barra.

$$5.752 \text{ Ton}\cdot\text{m} / 8\text{m} = \mathbf{0.72 \text{ Ton}}$$

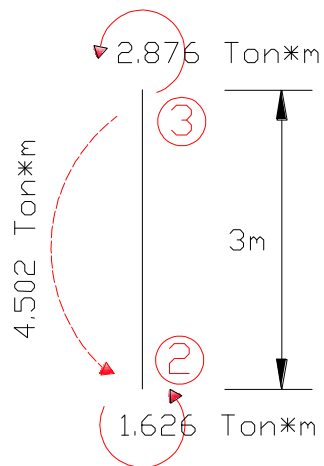


Para la columna 2-3:



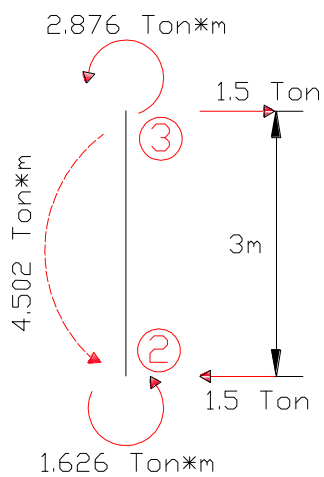
Suma de momentos en los extremos de la barra:

$$2.876 \text{ ton*m} + 1.626 \text{ ton*m} = 4.502 \text{ Ton*m}$$

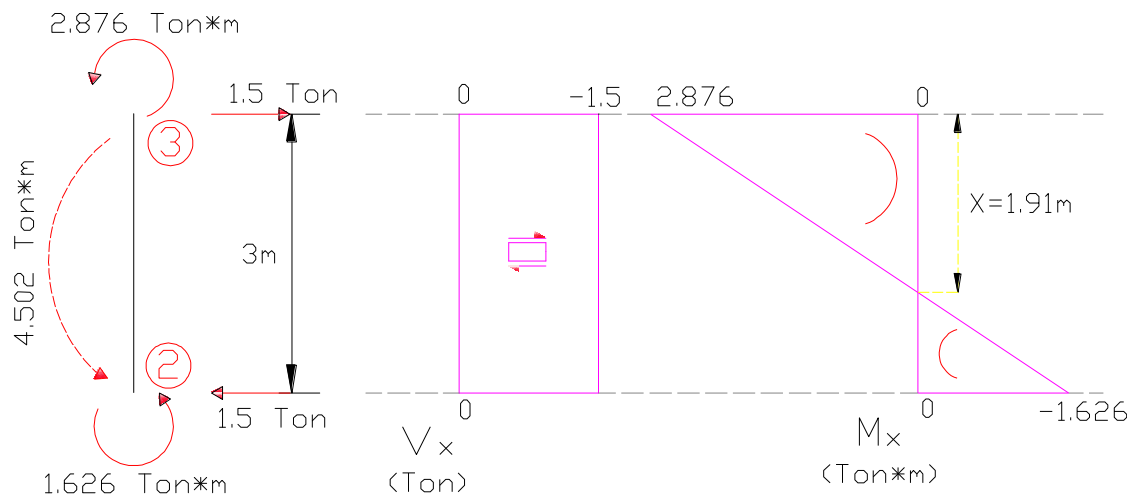


Fuerzas Cortantes en los extremos de la barra:

$$4.502 \text{ Ton*m} / 3\text{m} = \mathbf{1.5 \text{ Ton}}$$

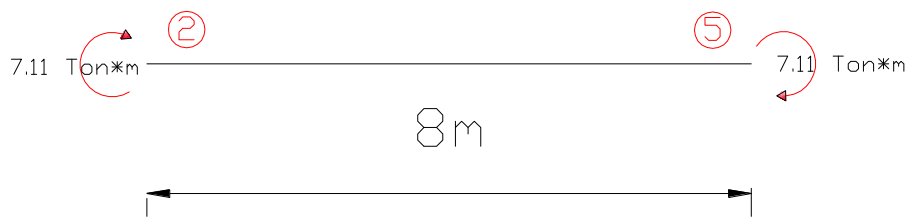


Diagramas de Fuerza Cortante, Momento flexionante.



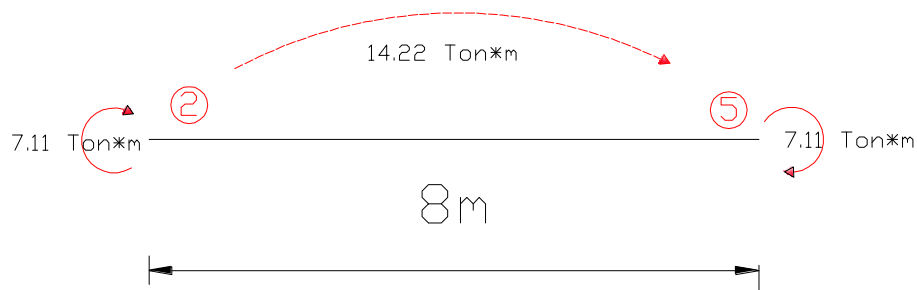
$$X = (2.876) / (4.052/3m) = 1.91m$$

Para la Viga 2-5:



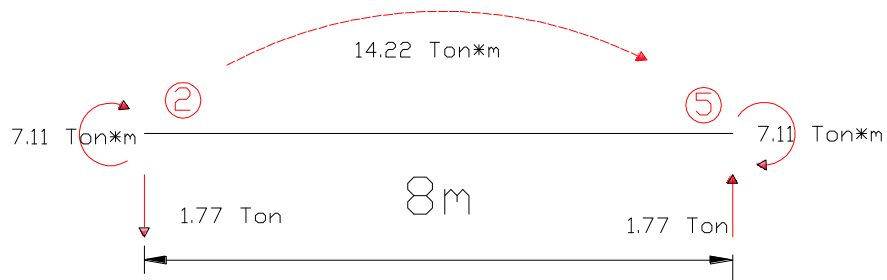
Suma de momentos en los extremos de la barra:

$$7.11 \text{ ton*m} + 7.11 \text{ ton*m} = 14.22 \text{ Ton*m}$$

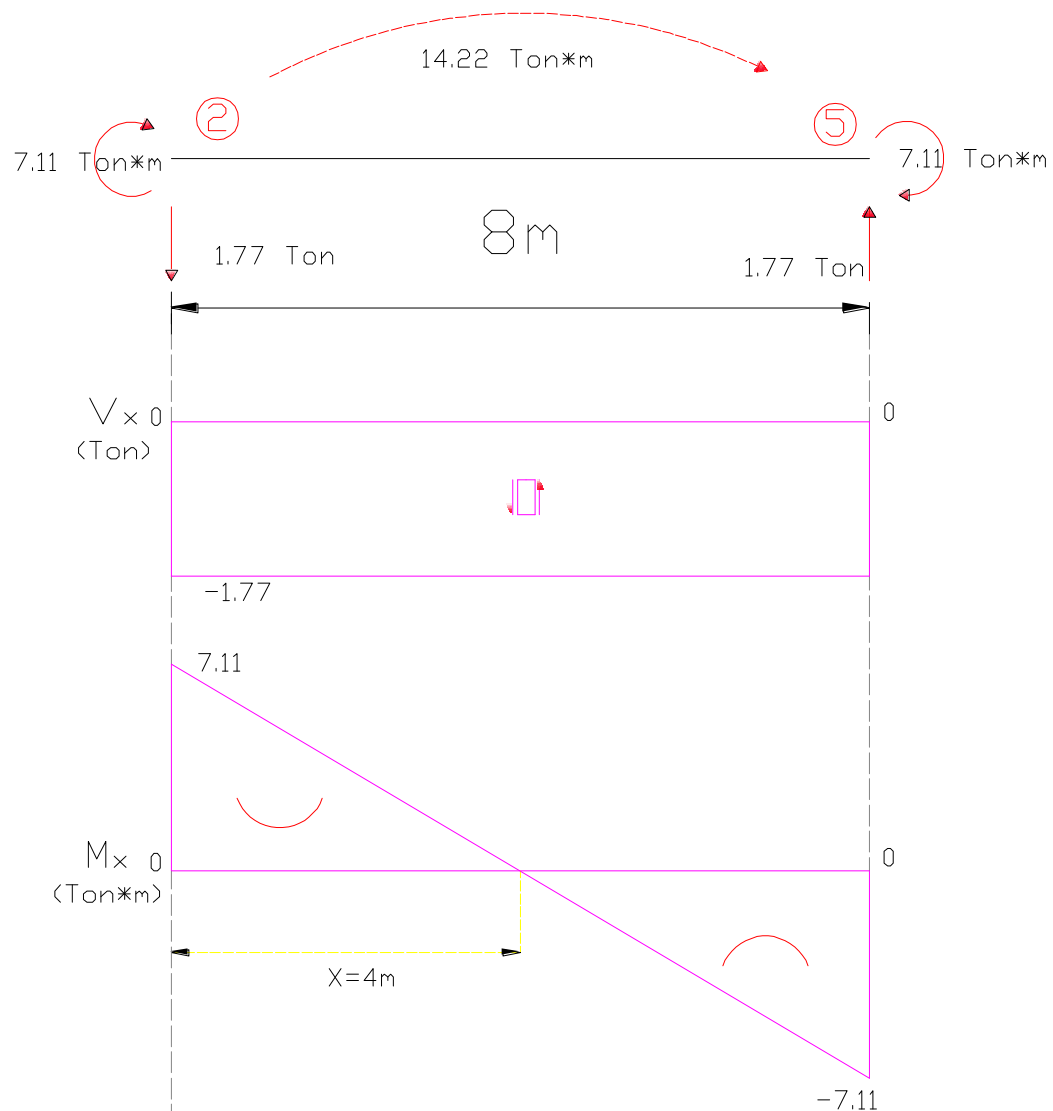


Fuerzas Cortantes en los extremos de la barra:

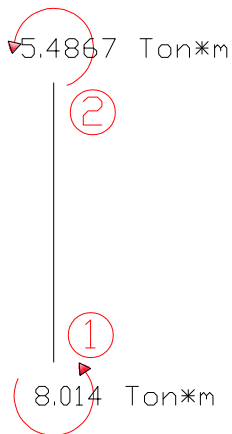
$$14.22 \text{ Ton}\cdot\text{m} / 8\text{m} = \mathbf{1.77 \text{ Ton}}$$



Diagramas de Fuerza Cortante, Momento flexionante.

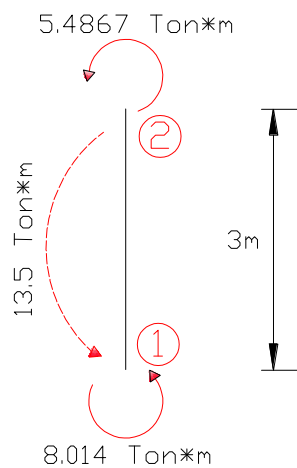


Para la columna 1-2:



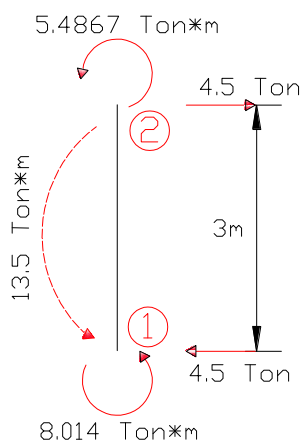
Suma de momentos en los extremos de la barra:

$$5.4867 \text{ ton*m} + 8.014 \text{ ton*m} = 13.5 \text{ Ton*m}$$

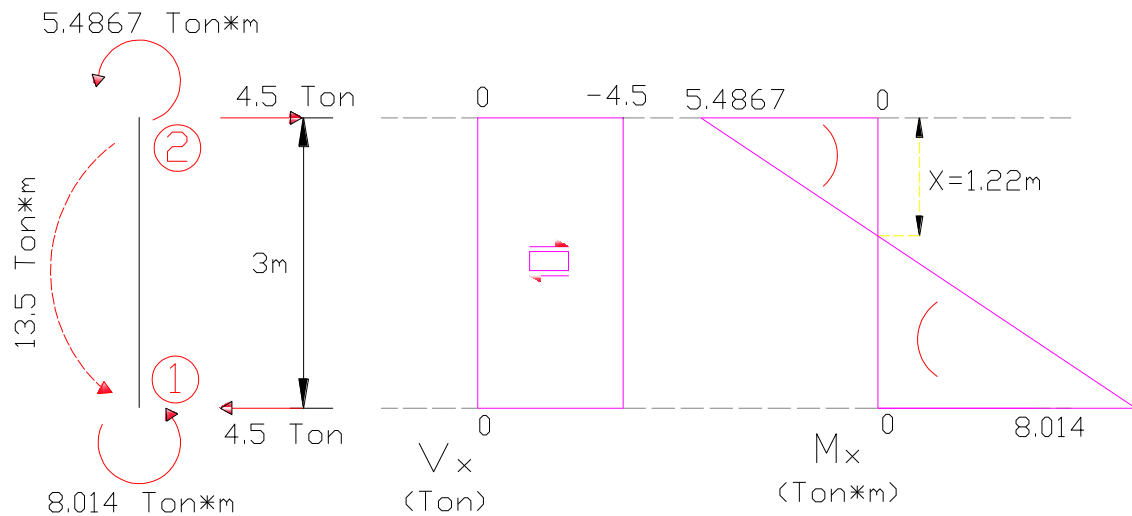


Fuerzas Cortantes en los extremos de la barra:

$$13.5 \text{ Ton*m} / 3\text{m} = 4.5 \text{ Ton}$$



Diagramas de Fuerza Cortante, Momento flexionante.

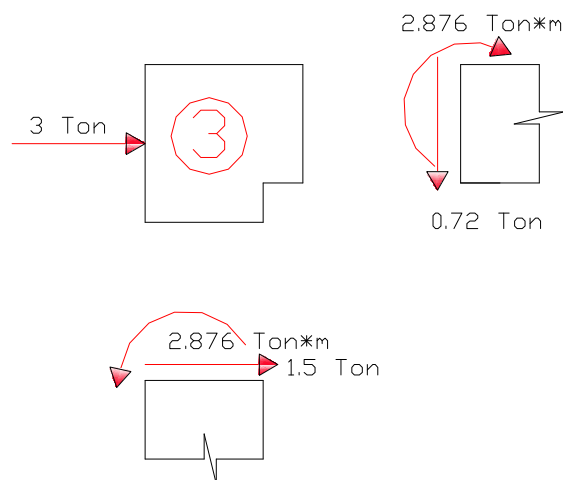


$$X = (5.4867) / (13.5/3m) = 1.22m$$

Fuerzas en los nodos.

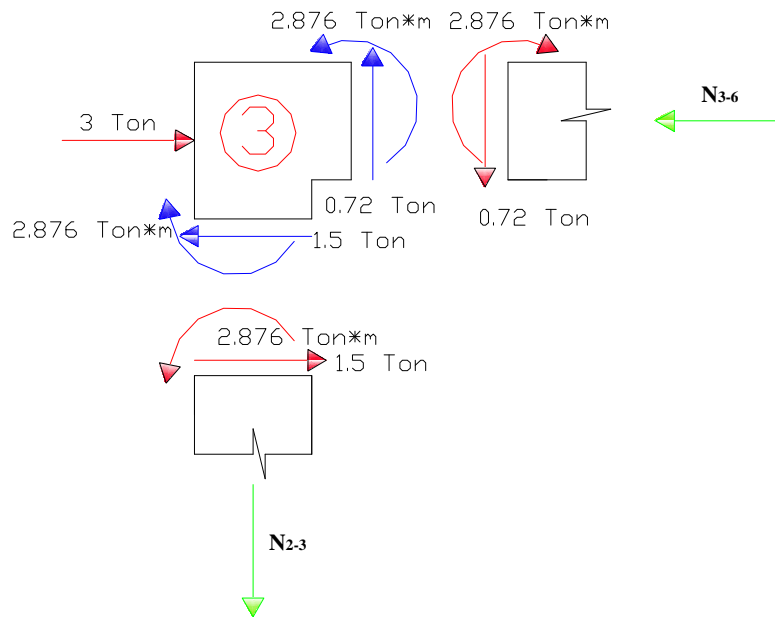
Ahora transmitiremos las fuerzas cortantes en los extremos de las barras, así como los momentos, al nodo y checar equilibrio estático en este.

Nodo 3.



De este modo obtendremos las fuerzas axiales en las barras, así como su condición, ya sea a Tensión o Compresión.

Se transmiten los cortantes y momentos al nodo con la misma magnitud pero en sentido inverso.



Equilibrio estático.

$$\sum M = 0$$

$$-2.876 \text{ Ton} \cdot \text{m} + 2.876 \text{ Ton} \cdot \text{m} = 0$$

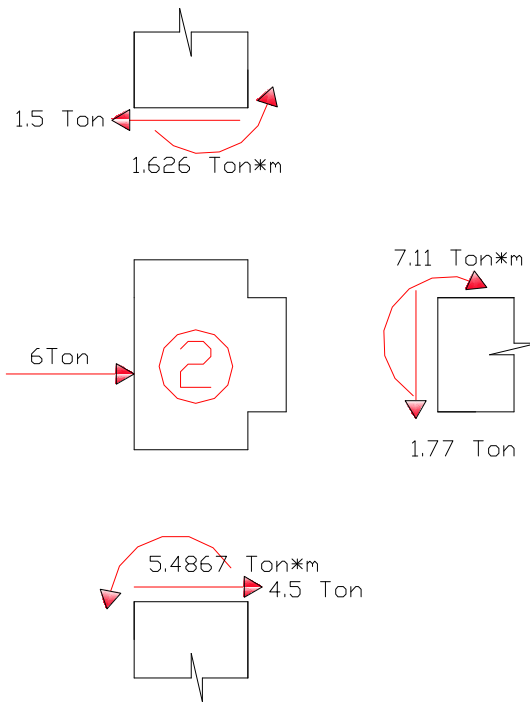
$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$0.72 \text{ Ton} - N_{2-3} = 0 \quad \quad \quad \underline{N_{2-3} = 0.72 \text{ Ton (T)}}$$

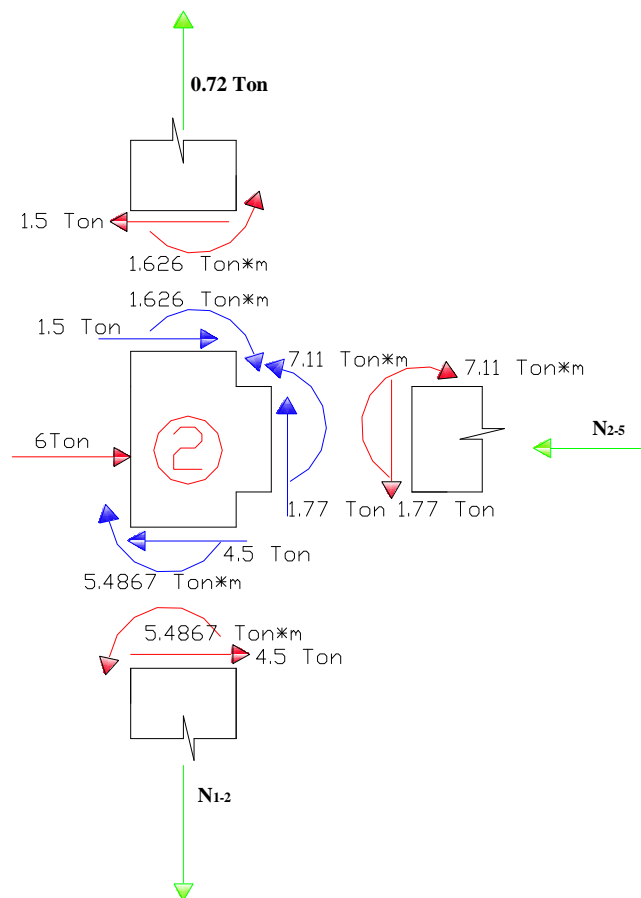
$$+\rightarrow \sum F_x = 0$$

$$-1.5 \text{ Ton} + 3 \text{ Ton} - N_{3-6} = 0 \quad \quad \quad \underline{N_{3-6} = 1.5 \text{ Ton (C)}}$$

Nodo 2.



Cortantes y momentos en el nodo.



Equilibrio estático.

$$\overset{M+}{\curvearrowright} \Sigma M = 0$$

$$-1.626 \text{ Ton} \cdot \text{m} - 5.4867 \text{ Ton} \cdot \text{m} + 7.11 \text{ Ton} \cdot \text{m} = 0$$

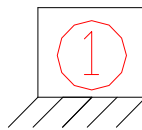
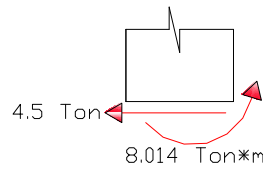
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$0.72 \text{ Ton} + 1.77 \text{ Ton} - N_{1-2} = 0 \quad \quad \quad \underline{N_{1-2} = 2.5 \text{ Ton (T)}}$$

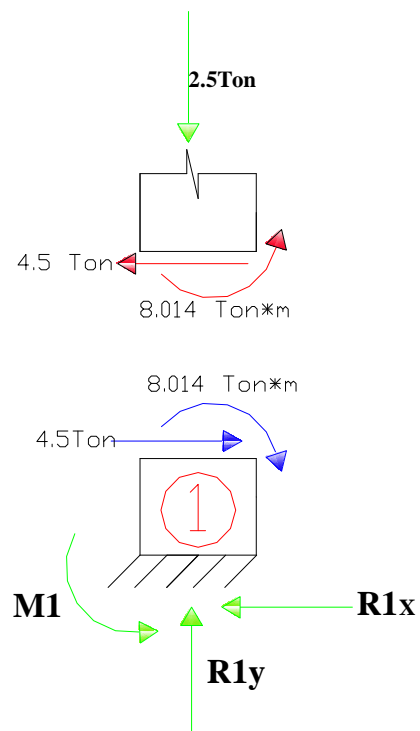
$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$-4.5 \text{ Ton} + 1.5 \text{ Ton} + 6 \text{ Ton} - N_{2-5} = 0 \quad \quad \quad \underline{N_{2-5} = 3 \text{ Ton (C)}}$$

Apoyo (Nodo) 1.



Cortantes y momentos en el nodo.



Equilibrio estático.

$$\overset{\curvearrowleft}{M+} \Sigma M = 0$$

$$-8.014 \text{ Ton} \cdot \text{m} + M_1 = 0$$

$$\underline{\underline{M_1 = 8.014 \text{ Ton} \cdot \text{m}}}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$-2.5 \text{ Ton} + R_{1y} = 0$$

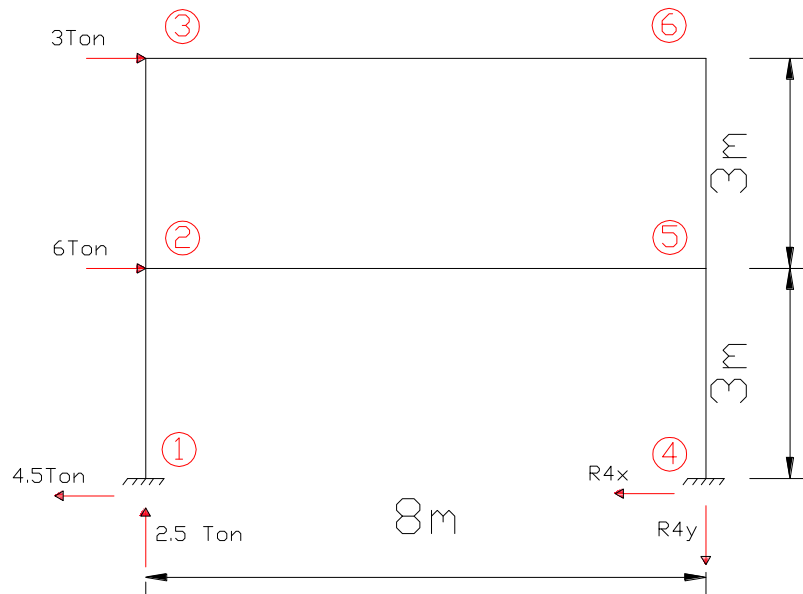
$$\underline{\underline{R_{1y} = 2.5 \text{ Ton} \uparrow}}$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$4.5 \text{ Ton} - R_{1x} = 0$$

$$\underline{\underline{R_{1x} = 4.5 \text{ Ton} \leftarrow}}$$

Verificación de equilibrio estático global.



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$2.5 \text{ Ton} - R_{4y} = 0$$

$$\underline{\underline{R_{4y} = 2.5 \text{ Ton} \downarrow}}$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

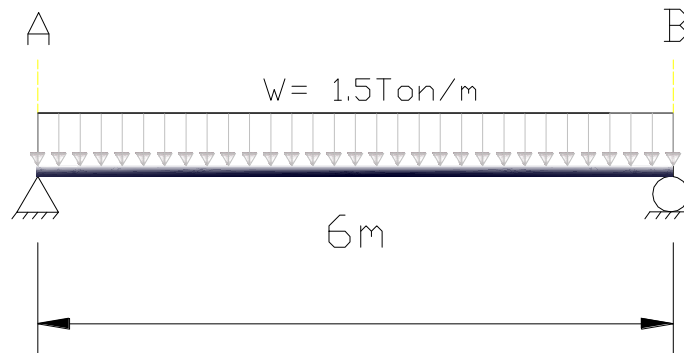
$$4.5 \text{ Ton} - 6 \text{ Ton} - 3 \text{ Ton} + R_{4x} = 0$$

$$\underline{\underline{R_{4x} = 4.5 \text{ Ton} \leftarrow}}$$

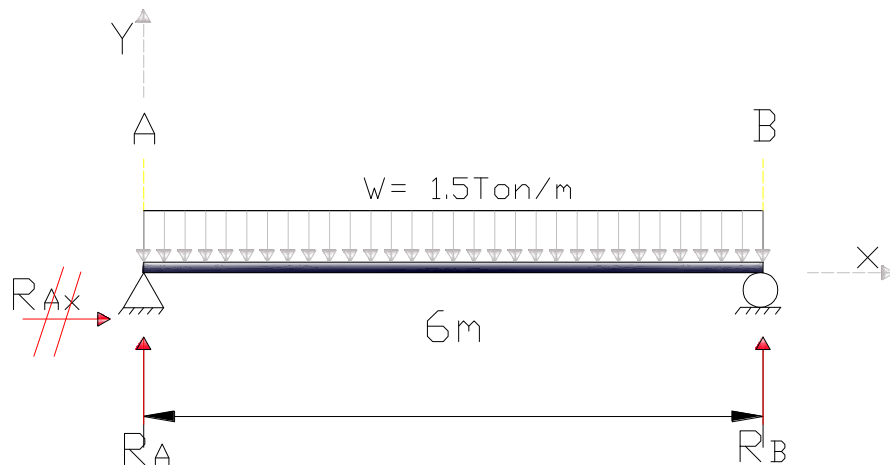
Así corresponderá al interesado comprobar que estas reacciones corresponden a las que se pueden obtener por el análisis de los nodos 4, 5 y 6.

EJERCICIOS DE REPASO.

Calcular las reacciones, ecuaciones de cortante y de momento así como dibujar sus correspondientes diagramas para las siguientes vigas, utilizando las ecuaciones de la estática.

EJERCICIO 1

1. Identificamos las reacciones presentes en los apoyos y las comparamos con el número de ecuaciones de la estática que podemos utilizar, y así determinar si es posible resolverlas por estas.



Como no hay una fuerza actuante sobre el eje X la reacción $R_{Ax}=0$ y solo quedan como incógnitas R_A y R_B , que podemos obtener de una sumatoria de momentos y de fuerzas.

2. Obtención de las reacciones por las ecuaciones de la estática:

Sumatoria de momentos en el punto A.

$$\overset{M+}{\curvearrowright} \Sigma M_A = 0$$

$$(-1.5 \text{ Ton/m})(6 \text{ m})(3 \text{ m}) + (R_B (6 \text{ m})) = 0$$

$$-27 \text{ Ton} \cdot \text{m} + (R_B (6 \text{ m})) = 0$$

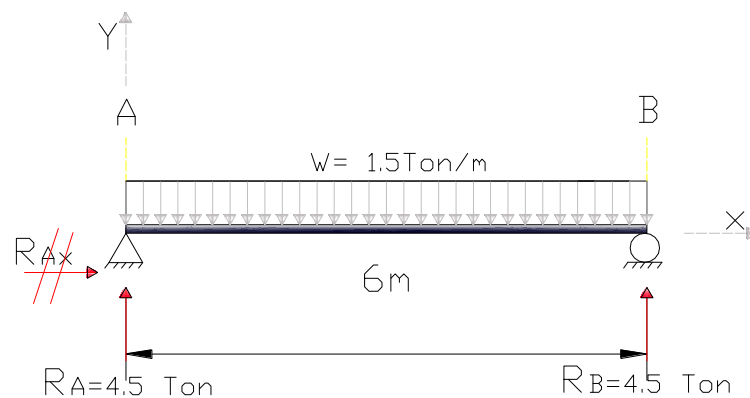
$$R_B = 27 \text{ Ton} \cdot \text{m} / 6 \text{ m} = \mathbf{4.5 \text{ Ton} \uparrow}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$R_A - 1.5 \text{ Ton/m} (6 \text{ m}) + R_B = 0$$

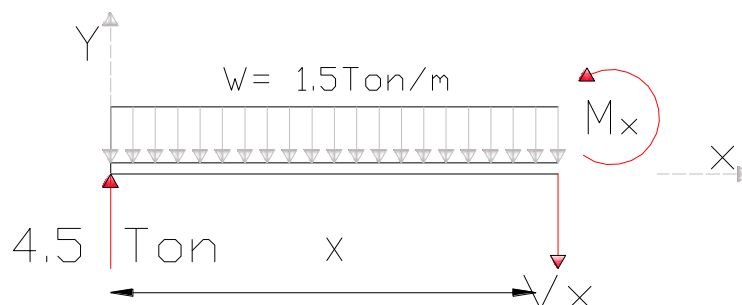
$$R_A - 9 \text{ Ton} + 4.5 \text{ Ton} = 0$$

$$\mathbf{R_A = 4.5 \text{ Ton} \uparrow}$$



3. Ecuaciones de Fuerza cortante (V_x) y Momento Flexionante (M_x):

Tramo AB.



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

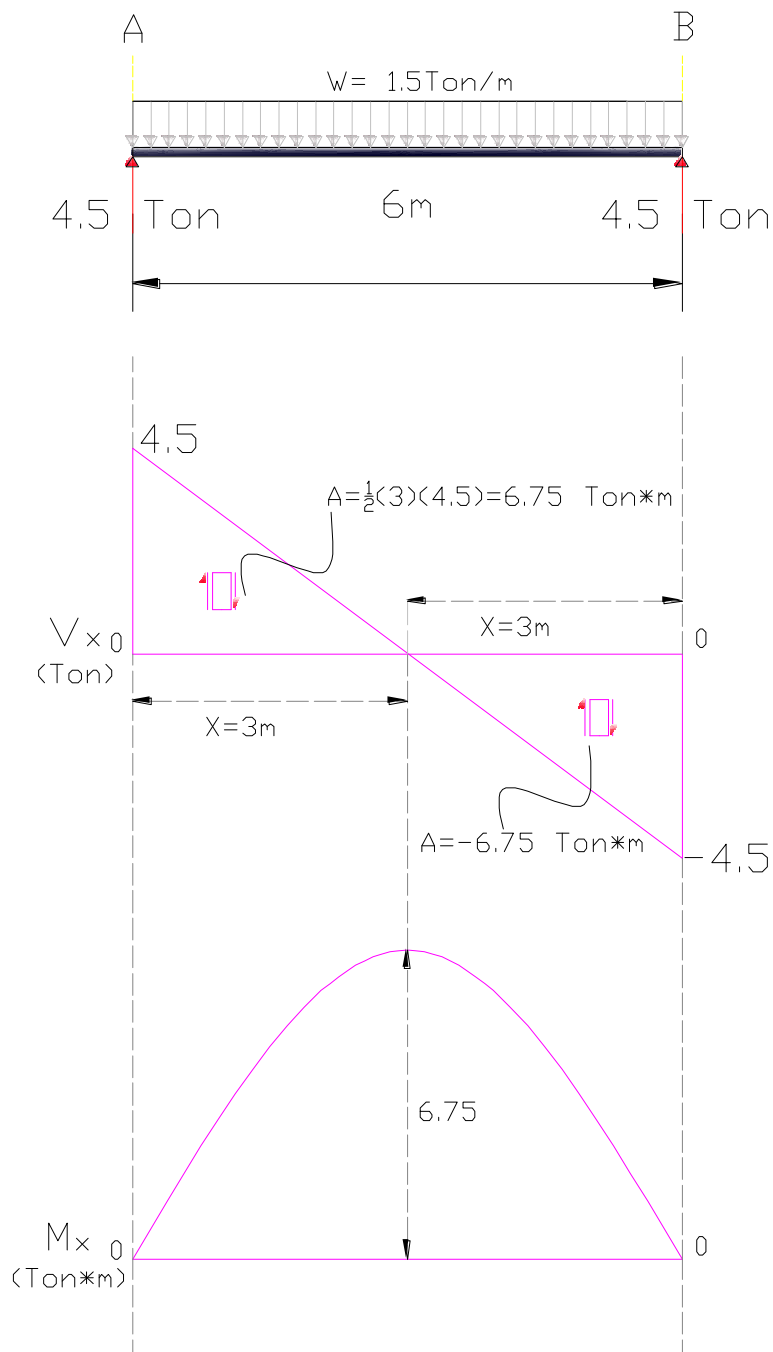
$$4.5 - 1.5x - V_x = 0 ; \mathbf{V_x = 4.5 - 1.5x} \quad 0 \leq x \leq 6 \text{ m}$$

$$\overset{M+}{\curvearrowright} \Sigma M_x = 0$$

$$-4.5x + (1.5x)(x/2) + M_x = 0$$

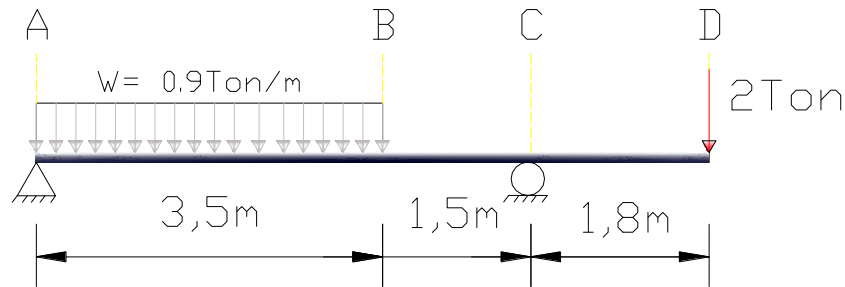
$$\mathbf{M_x = 4.5x - (1.5x^2/2)}$$

4. Diagramas de Fuerza cortante (V_x) y Momento Flexionante (M_x):

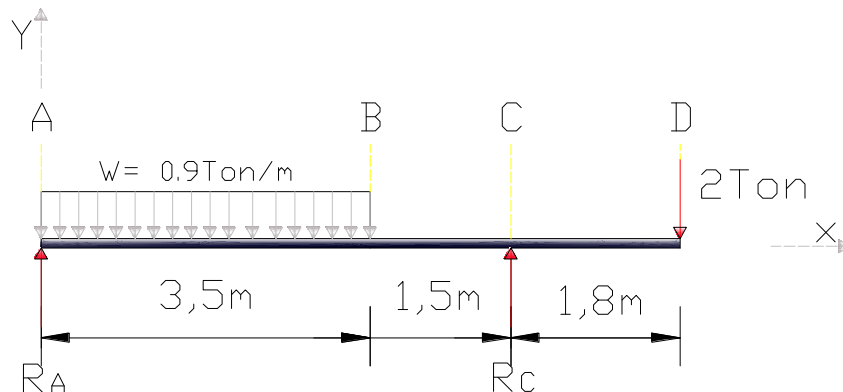


EJERCICIOS DE REPASO.

Calcular las reacciones, ecuaciones de cortante y de momento así como dibujar sus correspondientes diagramas para las siguientes vigas, utilizando las ecuaciones de la estática.

EJECICIO 2

1. Identificamos las reacciones presentes en los apoyos y las comparamos con el número de ecuaciones de la estática que podemos utilizar, y así determinar si es posible resolverlas por estas.



Como no hay una fuerza actuante sobre el eje X la reacción $R_x = 0$ y solo quedan como incógnitas R_A y R_C , que podemos obtener de una sumatoria de momentos y de fuerzas.

2. Obtención de las reacciones por las ecuaciones de la estática:

Sumatoria de momentos en el punto A.

$$\sum M_A = 0$$

$$(-0,9 \text{ Ton/m})(3,5 \text{ m})(3,5 \text{ m})/2 + (R_C)(5 \text{ m}) - (2 \text{ Ton})(6,8 \text{ m}) = 0$$

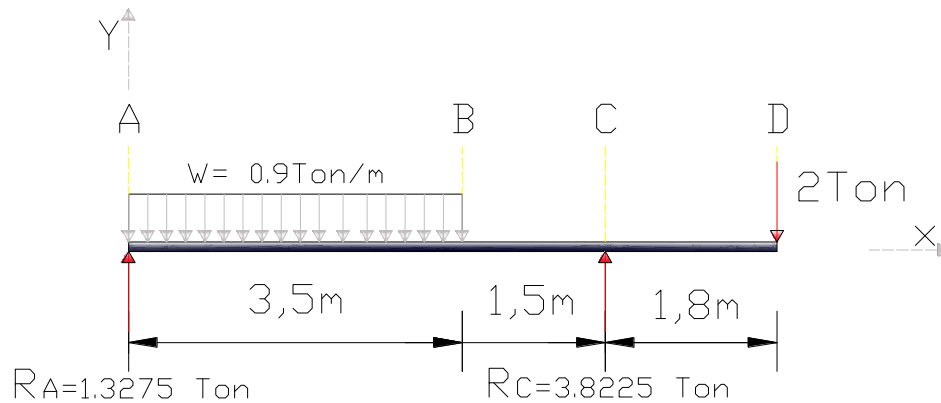
$$-5,125 \text{ Ton} \cdot \text{m} + (R_C)(5 \text{ m}) - 13,6 \text{ Ton} \cdot \text{m} = 0$$

$$R_C = 3.8225 \text{ Ton} \uparrow$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$R_A - 0.9 \text{ Ton/m} (3.5 \text{ m}) + R_C - 2 \text{ Ton} = 0 ; R_A - 3.15 \text{ Ton} + 3.8225 \text{ Ton} - 2 \text{ Ton} = 0$$

$$R_A = 1.3275 \text{ Ton} \uparrow$$



3. Ecuaciones de Fuerza cortante (V_x) y Momento Flexionante (M_x):

Tramo AB.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$V_x = 1.3275 - 0.9x \quad 0 \leq x \leq 3.5 \text{ m}$$

$$\begin{array}{c} \curvearrowleft \\ M_+ \\ \Sigma M_x = 0 \end{array}$$

$$M_x = 1.3275x - (0.9x^2/2)$$

Tramo BC.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$V_x = 1.3275 - 3.15 = -1.8225 \quad 3.5 \leq x \leq 5 \text{ m}$$

$$\begin{array}{c} \curvearrowleft \\ M_+ \\ \Sigma M_x = 0 \end{array}$$

$$M_x = 1.3275x - 3.15(x - 1.75)$$

Tramo CD.

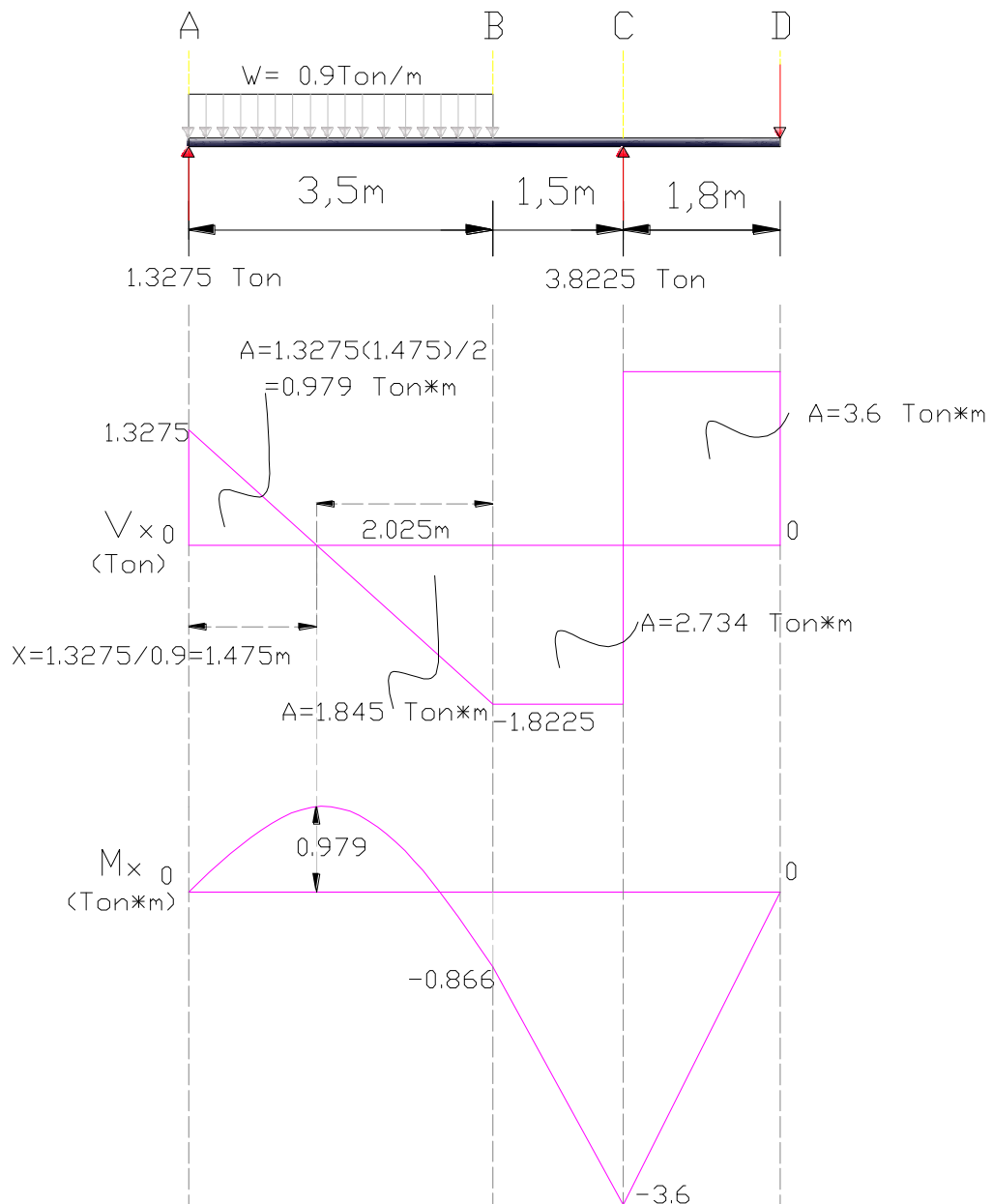
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$V_x = 1.3275 - 3.15 + 3.8225 = 2 \quad 0.5 \leq x \leq 6.8 \text{ m}$$

$$\curvearrowright \Sigma M_x = 0$$

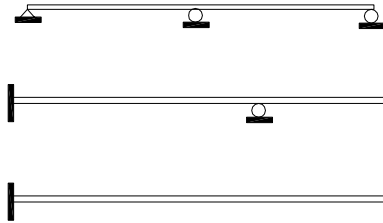
$$M_x = 1.3275x - 3.15(x-1.75) + 3.8225(x-5)$$

4. Diagramas de Fuerza cortante (V_x) y Momento Flexionante (M_x):



VIGAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS

El análisis que se efectuó en el capítulo anterior, corresponde a la aplicación de diversos métodos para la determinación de deformaciones. Como una particularidad en los ejercicios de aplicación, se tiene que todas las vigas analizadas eran del tipo ISOSTATICAS, es decir, estáticamente determinadas. Sin embargo, es muy común encontrarse con vigas que tienen más de un claro y más de dos apoyos, o bien con apoyos empotrados en ambos extremos.



En estos casos, el número de reacciones es mayor que el número de ecuaciones que se pueden plantear por aplicación de las condiciones de equilibrio estático. Por ello, este tipo de vigas se denominan estáticamente indeterminadas (ó hiperestáticas), en donde la característica principal es que las reacciones no se pueden determinar por simple aplicación de las condiciones de equilibrio estático. Para determinarlas habrá que recurrir a diferentes metodologías, por mencionar algunas:

- Método de la doble integración
- Método de área de momentos
- Método de superposición
- Método de la Viga Conjugada
- Método de la Ecuación de Tres Momentos
- En general, métodos iterativos (Cross, Kanni), métodos energéticos (Trabajo Virtual, Teoremas de Castigliano), métodos matriciales (Rigideces, Flexibilidades).

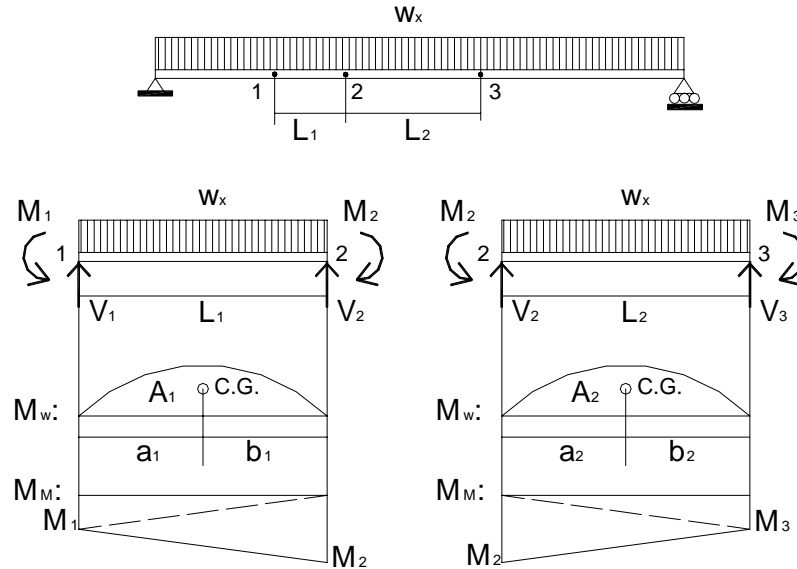
Aunque algunos de los métodos mencionados, hayan sido planteados en el capítulo anterior, para determinar deformaciones, es posible aplicarlos para determinar las reacciones redundantes (las reacciones que no es posible determinar a partir de las condiciones de equilibrio estático) tomando en consideración algunas condiciones conocidas de deformación, sin que sea prioritario determinar las deformaciones. Por lo que, la aplicación de estos métodos (los primeros cinco mencionados anteriormente) es básicamente para determinar las reacciones redundantes, si se requiere, la determinación de las deformaciones, se podrá llevar a cabo la aplicación de las metodologías como se vió anteriormente. Los principios y conceptos desarrollados en cada uno de los diferentes métodos, no se modifican para su aplicación en el análisis de vigas hiperestáticas.

Tipos de vigas hiperestáticas y grados de hiperestaticidad.

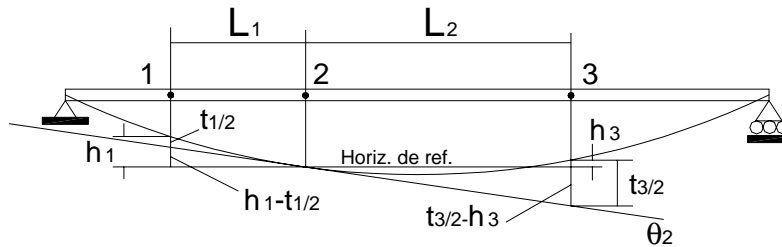
	No. de incógnitas	Ec's de equil. estático	Grado de hiperestaticidad
	3	2	$3-2=1$
	3	2	$3-2=1$
	4	2	$4-2=2$
	4	2	$4-2=2$

ECUACION DE TRES MOMENTOS PARA LA SOLUCION DE VIGAS CONTINUAS.

Para el desarrollo de la ecuación de tres momentos a utilizar en la solución de vigas continuas (el tipo de vigas que tienen dos claros o más), particularmente en la determinación de los momentos en los apoyos de las vigas (condiciones de apoyo empotrados y apoyos interiores), considérese la viga mostrada con carga uniformemente distribuida, aunque la condición de carga puede ser de tipo general, simplemente apoyada en los extremos y definiendo los puntos interiores “1”, “2” y “3” con distancias L_1 y L_2 entre ellos.



Configuración de deformación, se muestra como horizontal de referencia una línea horizontal que pasa por el punto intermedio “2”.



En donde:

h_1, h_3 : Distancias verticales de los puntos 1 y 3 con respecto a la horizontal de referencia que pasa por el punto “2”.

θ_2 : Tangente de referencia que pasa por el punto “2”.

$t_{1/2}, t_{3/2}$: Desviaciones tangenciales de los puntos “1” y “3” respecto a la tangente de referencia en “2”.

De la configuración de deformación:

$$\frac{h_1 - t_{1/2}}{L_1} = \frac{t_{3/2} - h_3}{L_2}$$

$$\frac{t_{3/2}}{L_2} + \frac{t_{1/2}}{L_1} = \frac{h_1}{L_1} + \frac{h_3}{L_2}$$

De acuerdo con el segundo teorema del método área de momentos

$$t_{1/2} = \int_1^2 \frac{M_x}{EI} x_1 dx$$

$$t_{3/2} = \int_2^3 \frac{M_x}{EI} x_3 dx$$

Considérese ahora la representación de los tramos definidos entre los puntos 1-2 y 2-3, representando las fuerzas cortantes y momentos flexionantes en los extremos de cada uno de los tramos. Para la condición de carga considerada en cada uno de los tramos, es posible representar el diagrama de momentos correspondiente a la carga aplicada en el claro y el diagrama de momentos correspondiente por los momentos de continuidad en los extremos de cada uno de los tramos.

De esta representación de diagrama de momentos en cada uno de los tramos, es posible determinar las desviaciones tangenciales $t_{1/2}$ y $t_{3/2}$

$$t_{1/2} = \frac{1}{EI} \left[A_1 a_1 + \frac{1}{2} M_1 L_1 \left(\frac{1}{3} L_1 \right) + \frac{1}{2} M_2 L_1 \left(\frac{2}{3} L_1 \right) \right]$$

$$t_{3/2} = \frac{1}{EI} \left[A_2 b_2 + \frac{1}{2} M_2 L_2 \left(\frac{2}{3} L_2 \right) + \frac{1}{2} M_3 L_2 \left(\frac{1}{3} L_2 \right) \right]$$

Sustituyendo estas expresiones en la relación de $t_{1/2}$ y $t_{3/2}$ obtenida de la configuración de deformación

$$\frac{t_{3/2}}{L_2} + \frac{t_{1/2}}{L_1} = \frac{h_1}{L_1} + \frac{h_3}{L_2}$$

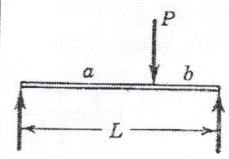
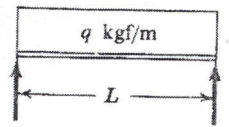
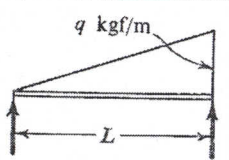
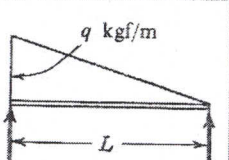
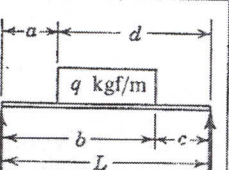
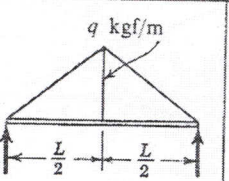
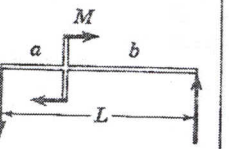
$$\frac{\frac{1}{EI} \left[A_2 b_2 + \frac{1}{2} M_2 L_2 \left(\frac{2}{3} L_2 \right) + \frac{1}{2} M_3 L_2 \left(\frac{1}{3} L_2 \right) \right]}{L_2} + \frac{\frac{1}{EI} \left[A_1 a_1 + \frac{1}{2} M_1 L_1 \left(\frac{1}{3} L_1 \right) + \frac{1}{2} M_2 L_1 \left(\frac{2}{3} L_1 \right) \right]}{L_1} = \frac{h_1}{L_1} + \frac{h_3}{L_2}$$

$$\frac{1}{6} M_1 L_1 + \frac{2}{6} M_2 L_1 + \frac{2}{6} M_2 L_2 + \frac{1}{6} M_3 L_2 + \frac{A_1 a_1}{L_1} + \frac{A_2 b_2}{L_2} = EI \left(\frac{h_1}{L_1} + \frac{h_3}{L_2} \right)$$

$$M_1 L_1 + 2 M_2 (L_1 + L_2) + M_3 L_2 + \frac{6 A_1 a_1}{L_1} + \frac{6 A_2 b_2}{L_2} = 6 EI \left(\frac{h_1}{L_1} + \frac{h_3}{L_2} \right)$$

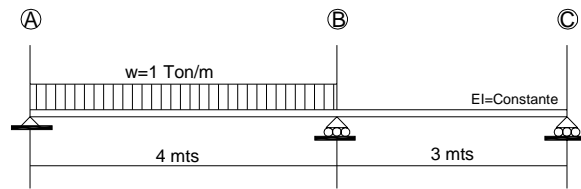
La ecuación anterior corresponde a la “ecuación de tres momentos”. El término $6EI \left(\frac{h_1}{L_1} + \frac{h_3}{L_2} \right)$ es cero cuando los puntos “1”, “2” y “3” se encuentran a la misma altura entre sí, después de que se ha flexionado la viga, como sería el caso de que estos puntos coincidieran con los puntos de localización de apoyos en la viga.

TABLA 8-1. Valores de $\frac{6A\bar{a}}{L}$ y $\frac{6A\bar{b}}{L}$

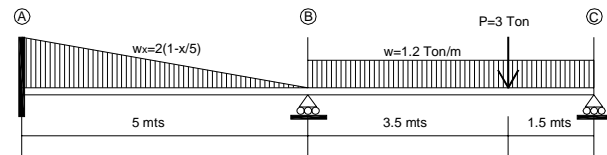
CASO N.º	TIPO DE CARGA SOBRE EL TRAMO	$\frac{6A\bar{a}}{L}$	$\frac{6A\bar{b}}{L}$
1		$\frac{Pa}{L} (L^2 - a^2)$	$\frac{Pb}{L} (L^2 - b^2)$
2		$\frac{qL^3}{4} = \frac{QL^2}{4}$	$\frac{qL^3}{4} = \frac{QL^2}{4}$
3		$\frac{8}{60} qL^3 = \frac{8}{30} QL^2$	$\frac{7}{60} qL^3 = \frac{7}{30} QL^2$
4		$\frac{7}{60} qL^3 = \frac{7}{30} QL^2$	$\frac{8}{60} qL^3 = \frac{8}{30} QL^2$
5		$\frac{q}{4L} [b^2(2L^2 - b^2) - a^2(2L^2 - a^2)]$	$\frac{q}{4L} [d^2(2L^2 - d^2) - c^2(2L^2 - c^2)]$
6		$\frac{5}{32} qL^3 = \frac{5}{16} QL^2$	$\frac{5}{32} qL^3 = \frac{5}{16} QL^2$
7		$-\frac{M}{L} (3a^2 - L^2)$	$+\frac{M}{L} (3b^2 - L^2)$

Ejercicio

Aplicar la ecuación de tres momentos para determinar el momento de continuidad en la viga mostrada y posteriormente determinar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.

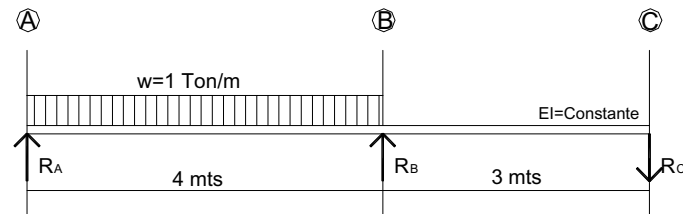
**Ejercicio**

Aplicar la ecuación de tres momentos para determinar los momentos en los apoyos de la viga mostrada y posteriormente determinar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.



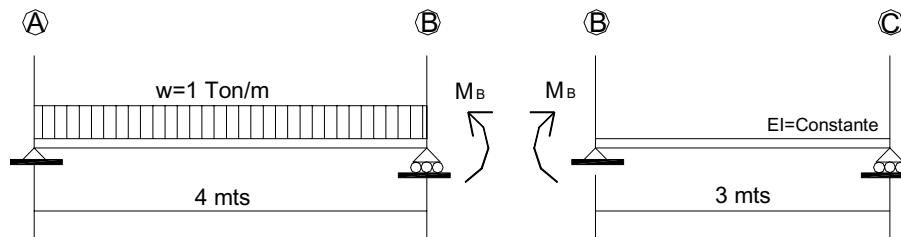
Solución ejercicio

Grado de indeterminación de la viga:



No. de reacciones	3	R_A, R_B y R_C
No. de ec's de la estática	2	$\Sigma M=0, \Sigma F_v=0$
Grado de indeterminación	1	

En la aplicación de la ecuación de tres momentos se determinan los momentos en algunos puntos en la viga. Generalmente se seleccionan como puntos de aplicación, los apoyos de la viga, de esta manera en este ejercicio podremos seleccionar los apoyos y se determinará el momento de continuidad en "B", puesto que el momento en los apoyos en los extremos de la viga son nulos.



Al tener definido el momento de M_B , se puede determinar por aplicación de las condiciones de equilibrio estático las fuerzas de reacción R_A, R_B y R_C

Ecuación de tres momentos:

$$M_1 L_1 + 2M_2 (L_1 + L_2) + M_3 L_2 + \frac{6A_1 a_1}{L_1} + \frac{6A_2 b_2}{L_2} = 6EI \left(\frac{h_1}{L_1} + \frac{h_3}{L_2} \right)$$

Al aplicar esta ecuación considerando los puntos de apoyo de la viga

$$M_1 = M_A = 0 \quad M_2 = M_B \neq 0 \quad M_3 = M_C = 0$$

Puesto que $h_A = h_B = h_C = 0$

$$6EI \left(\frac{h_1}{L_1} + \frac{h_3}{L_2} \right) = 6EI \left(\frac{h_A}{L_1} + \frac{h_C}{L_2} \right) = 0$$

Y los claros “1” y “2” quedan definidos por

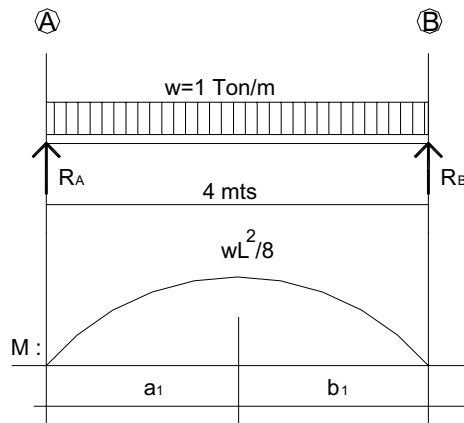
$$L_1 = L_{AB} = 4.0 \text{ mts}$$

$$L_2 = L_{BC} = 4.0 \text{ mts}$$

Los términos $\frac{6A_1 a_1}{L_1}$ y $\frac{6A_2 b_2}{L_2}$ se determinan a partir de el diagrama de momentos para la condición de carga actuando en cada uno de los claros de la viga.

Primer claro, entre los apoyos “A” y “B”

Considerando solamente la carga aplicada en el claro, para la determinación de el diagrama de momentos



$$A_1 = \frac{2}{3} \left(L \right) \left(\frac{wL^2}{8} \right) = \frac{1}{12} wL^3$$

$$a_1 = \frac{1}{2} L$$

$$\frac{6A_1 a_1}{L_1} = \frac{6 \left(\frac{1}{12} wL^3 \right) \left(\frac{1}{2} L \right)}{L} = \frac{1}{4} wL^3 = \frac{1}{4} (1.0)(4.0)^3 = 16.0$$

Segundo claro, entre los apoyos “B” y “C”

No hay carga aplicada en el claro, por lo que

$$\frac{6A_2 b_2}{L_2} = 0.0$$

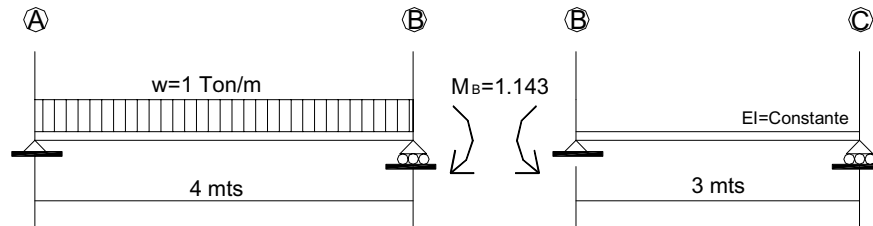
Sustituyendo valores en la ecuación de tres momentos:

$$M_1 L_1 + 2M_2 (L_1 + L_2) + M_3 L_2 + \frac{6A_1 a_1}{L_1} + \frac{6A_2 b_2}{L_2} = 6EI \left(\frac{h_1}{L_1} + \frac{h_3}{L_2} \right)$$

$$(0)(4.0) + 2(M_B)(4.0 + 3.0) + (0)(3.0) + (16.0) + (0.0) = 0$$

$$14M_B + 16 = 0$$

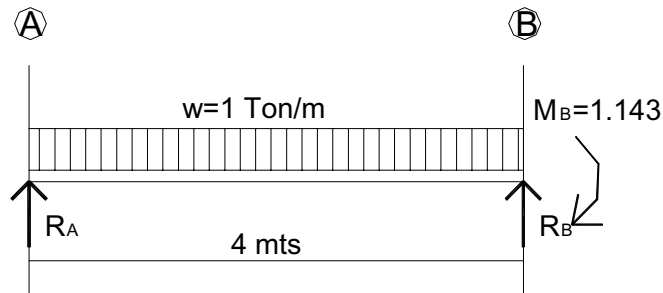
$$\Rightarrow M_B = -1.143 \text{ Ton} \cdot \text{m}$$



Determinación de las fuerzas de reacción en los apoyos de la viga

Aplicando las condiciones de equilibrio estático.

Primer claro, entre los apoyos “A” y “B”



$$\sum M_A = 0$$

$$R_B (L_1) - (w)(L_1) \left(\frac{1}{2} L_1 \right) - M_B = 0$$

$$R_B (4.0) - (1.0)(4.0) \left(\frac{1}{2} 4.0 \right) - (1.143) = 0$$

$$4R_B - 8 - 1.143 = 0$$

$$\Rightarrow R_B = 2.286 \text{ Ton}$$

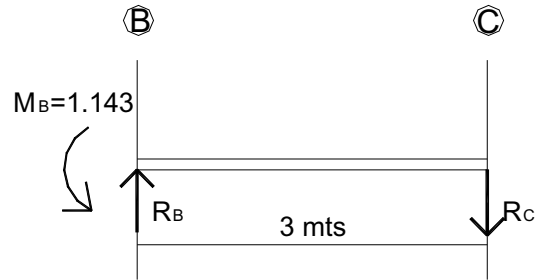
$$\sum F_y = 0$$

$$R_A + R_B - wL_1 = 0$$

$$R_A + (2.286) - (1.0)(4.0) = 0$$

$$\Rightarrow R_A = 1.714 \text{ Ton}$$

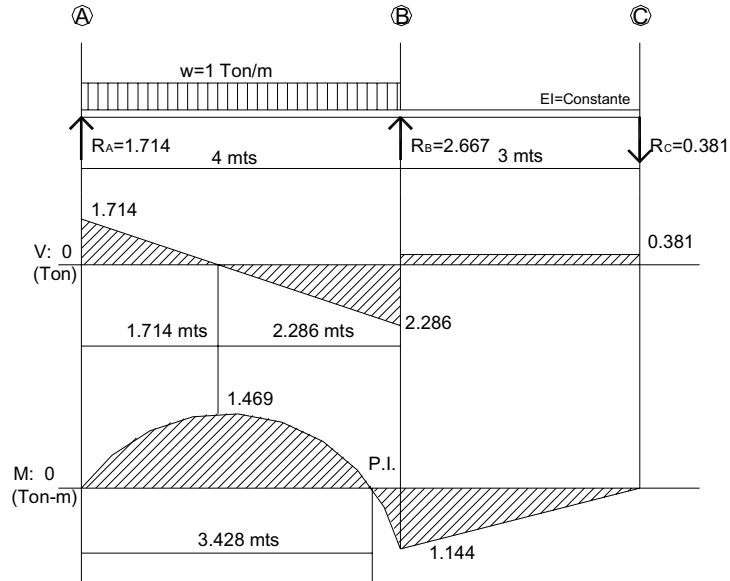
Segundo claro, entre los apoyos "B" y "C"



$$\begin{aligned}\sum M_B &= 0 \\ -R_C(L_2) + M_B &= 0 \\ -R_C(3.0) + (1.143) &= 0 \\ -3R_C - 1.143 &= 0 \\ \Rightarrow R_C &= 0.381\text{Ton}\end{aligned}$$

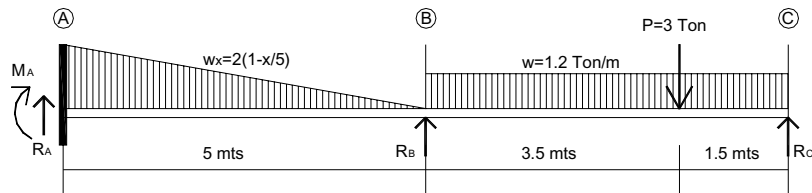
$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ R_B - R_C &= 0 \\ R_B - (0.381) &= 0 \\ \Rightarrow R_B &= 0.381\text{Ton}\end{aligned}$$

Finalmente, los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante, quedan determinados de la siguiente manera:



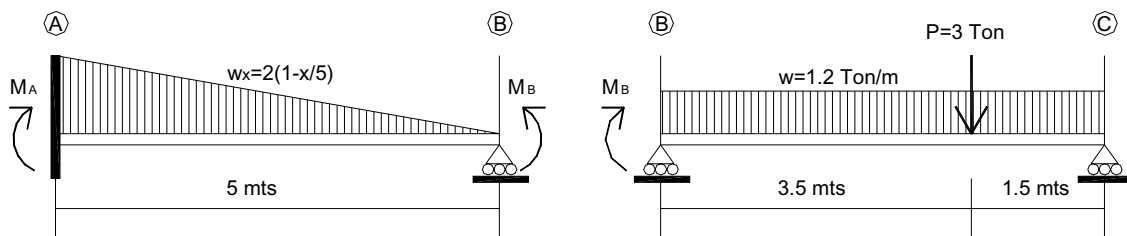
Solución ejercicio

Grado de indeterminación de la viga:



No. de reacciones	4	R_A, M_A, R_B y R_C
No. de ec's de la estática	2	$\Sigma M=0, \Sigma F_v=0$
No. de reacciones redundantes	2	

En la aplicación de la ecuación de tres momentos se determinan los momentos en algunos puntos en la viga. Generalmente se seleccionan como puntos de aplicación, los apoyos de la viga, de esta manera en este ejercicio podremos seleccionar los apoyos y se determinarán el momento en el empotramiento "A" y el momento de continuidad en "B", puesto que el momento en el apoyo en el extremo "C" de la viga es nulo.



Al tener definido los momentos M_A y M_B , se puede determinar por aplicación de las condiciones de equilibrio estático las fuerzas de reacción R_A , R_B y R_C

Aplicando la ecuación de tres momentos entre los apoyos "A", "B" y "C"

$$M_1 = M_A \neq 0$$

$$M_2 = M_B \neq 0$$

$$M_3 = M_C = 0$$

Puesto que $h_A = h_B = h_C = 0$

$$6EI \left(\frac{h_1}{L_1} + \frac{h_3}{L_2} \right) = 6EI \left(\frac{h_A}{L_1} + \frac{h_C}{L_2} \right) = 0$$

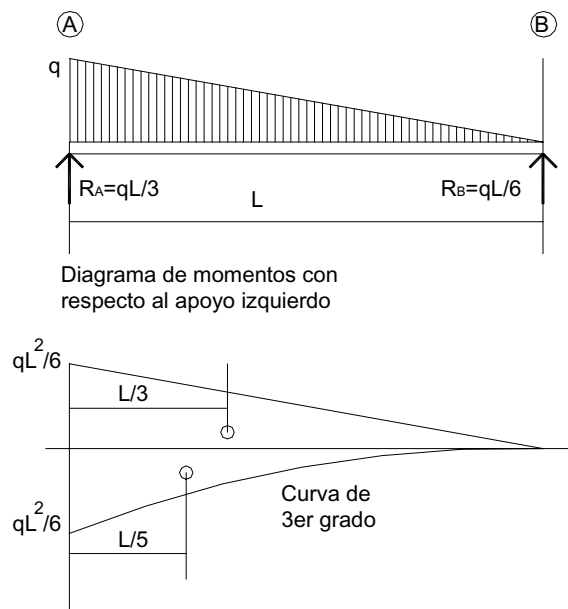
Y los claros "1" y "2" quedan definidos por

$$L_1 = L_{AB} = 5.0 \text{ mts}$$

$$L_2 = L_{BC} = 5.0 \text{ mts}$$

Los términos $\frac{6A_1a_1}{L_1}$ y $\frac{6A_2b_2}{L_2}$ se determinan a partir de el diagrama de momentos para la condición de carga actuando en cada uno de los claros de la viga.

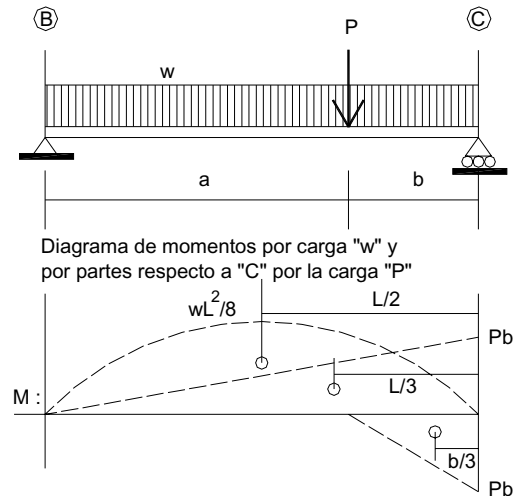
Primer claro, entre los apoyos "A" y "B"



Considerando solamente la carga aplicada en el claro, para la determinación del diagrama de momentos

$$\frac{6A_1a_1}{L_1} = \frac{7}{60}qL^3 = \frac{7}{60}(2.0)(5.0)^3 = 29.167$$

Segundo claro, entre los apoyos "B" y "C"



Considerando solamente la carga aplicada en el claro, para la determinación del diagrama de momentos

$$\frac{6A_2b_2}{L_2} = \frac{1}{4}qL_2^3 + \frac{Pb}{L_2}(L_2^2 - b_2^2) = \frac{1}{4}(1.2)(5.0)^3 + \frac{(3.0)(1.5)}{(5.0)}[(5.0)^2 - (1.5)^2]$$

$$\frac{6A_2b_2}{L_2} = 37.5 + 20.475 = 57.975$$

Sustituyendo valores en la ecuación de tres momentos:

$$M_1L_1 + 2M_2(L_1 + L_2) + M_3L_2 + \frac{6A_1a_1}{L_1} + \frac{6A_2b_2}{L_2} = 6EI\left(\frac{h_1}{L_1} + \frac{h_3}{L_2}\right)$$

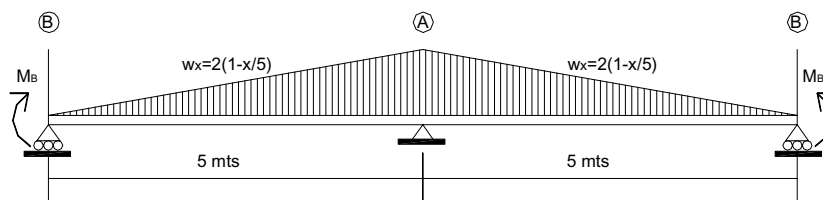
$$(M_A)(5.0) + 2(M_B)(5.0 + 5.0) + (0)(5.0) + (29.167) + (57.975) = 0$$

$$5M_A + 20M_B = -87.142$$

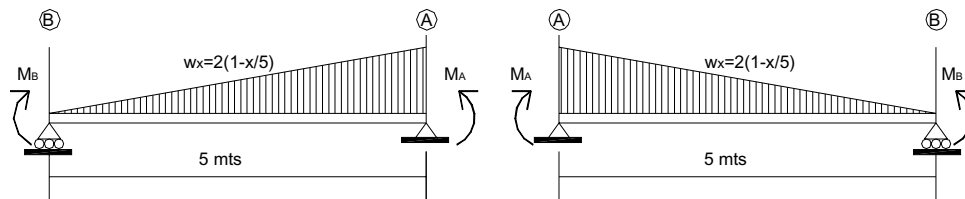
Es necesario tener un sistema de 2 ecuaciones para determinar los dos momentos M_A y M_B .

Se deberá aplicar la ecuación de tres momentos nuevamente para generar la Segunda ecuación y de esta manera resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

La ecuación de tres momentos debe ser aplicada en dos claros, en el caso de este problema, los dos claros que se muestran en la viga ya fueron utilizados. Puesto que el tipo de apoyo en "A" es un empotramiento, se puede considerar que en este apoyo se presenta una condición de simetría, de la siguiente manera:



Por lo que será posible aplicar la ecuación de tres momentos en los claros definidos por los apoyos “B”, “A” y “B”, y la ecuación de tres momentos estará en función de los momentos M_A y M_B , con lo cual se obtiene la ecuación necesaria para generar el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y poder determinar los momentos M_A y M_B .



Aplicando nuevamente la ecuación de tres momentos, ahora en los claros, entre los apoyos “B”, “A” y “B”

$$M_1 = M_B \neq 0$$

$$M_2 = M_A \neq 0$$

$$M_3 = M_B \neq 0$$

Puesto que $h_B = h_A = h_B = 0$

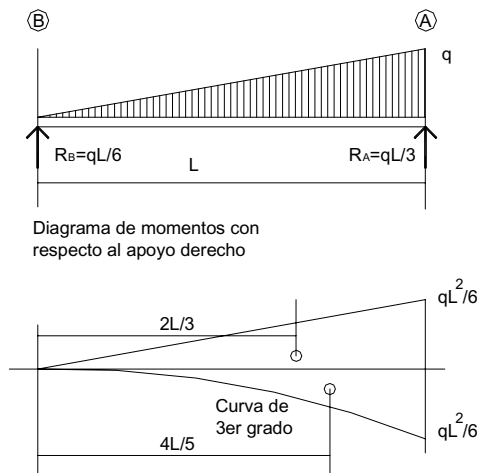
$$6EI \left(\frac{h_1}{L_1} + \frac{h_3}{L_2} \right) = 6EI \left(\frac{h_B}{L_1} + \frac{h_B}{L_2} \right) = 0$$

Y los claros “1” y “2” quedan definidos por

$$L_1 = L_{BA} = 5.0 \text{ mts}$$

$$L_2 = L_{AB} = 5.0 \text{ mts}$$

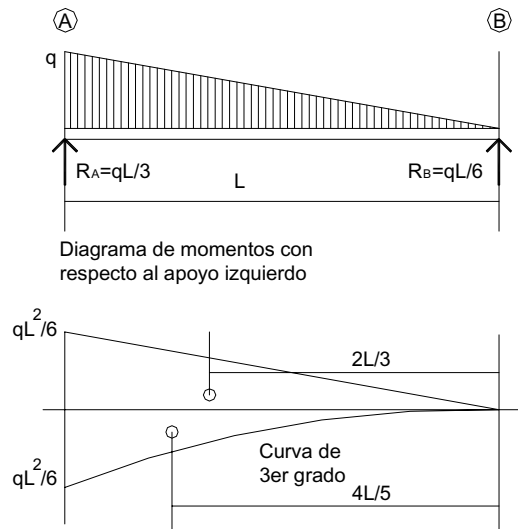
Primer claro, entre los apoyos “B” y “A”



Considerando solamente la carga aplicada en el claro, para la determinación de el diagrama de momentos

$$\frac{6A_1a_1}{L_1} = \frac{8}{60}qL_1^3 = \frac{8}{60}(2.0)(5.0)^3 = 33.333$$

Siguiente claro, entre los apoyos “A” y “B”



Considerando solamente la carga aplicada en el claro, para la determinación de el diagrama de momentos

$$\frac{6A_2b_2}{L_2} = \frac{8}{60}qL_2^3 = \frac{8}{60}(2.0)(5.0)^3 = 33.333$$

Sustituyendo valores en la ecuación de tres momentos:

$$M_1L_1 + 2M_2(L_1 + L_2) + M_3L_2 + \frac{6A_1a_1}{L_1} + \frac{6A_2b_2}{L_2} = 6EI\left(\frac{h_1}{L_1} + \frac{h_3}{L_2}\right)$$

$$(M_B)(5.0) + 2(M_A)(5.0 + 5.0) + (M_B)(5.0) + (33.333) + (33.333) = 0$$

$$20M_A + 10M_B = -66.666$$

Sistema de ecuaciones a resolver

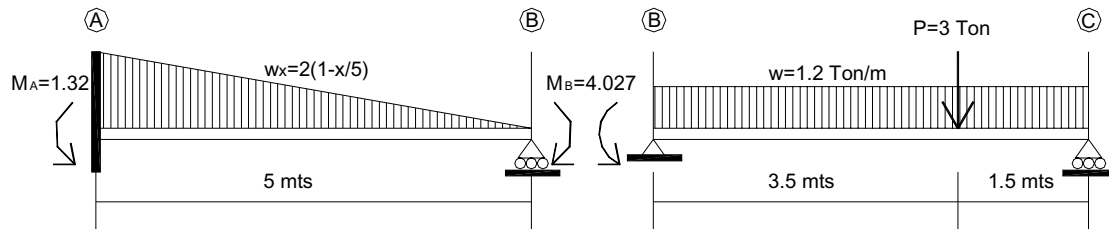
$$5M_A + 20M_B = -87.142$$

$$20M_A + 10M_B = -66.666$$

$$\Rightarrow M_A = -1.320 \text{ Ton} - \text{m}$$

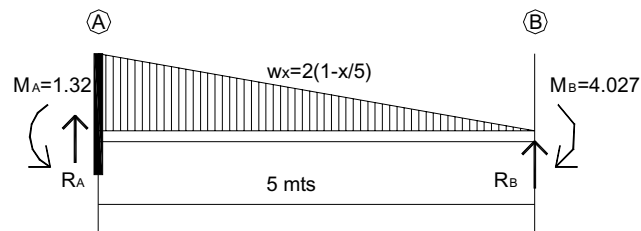
$$\Rightarrow M_B = -4.027 \text{ Ton} - \text{m}$$

Los resultados negativos indican que la viga se flexiona hacia arriba por la acción de estos momentos. Un resultado positivo indicaría que los momentos actuando de manera independiente, ocasionarían que la viga se flexionara verticalmente hacia abajo



Determinación de las fuerzas de reacción en los apoyos de la viga
Aplicando las condiciones de equilibrio estático.

Primer claro, entre los apoyos “A” y “B”



$$\sum M_A = 0$$

$$R_B(L_1) - \left(\frac{1}{2} L_1 q \right) \left(\frac{1}{3} L_1 \right) + M_A - M_B = 0$$

$$R_B(5.0) - \frac{1}{2}(5.0)(2.0) \left(\frac{1}{3} 5.0 \right) + (1.32) - (4.027) = 0$$

$$5R_B - 8.333 + 1.32 - 4.027 = 0$$

$$\Rightarrow R_B = 2.208 \text{ Ton}$$

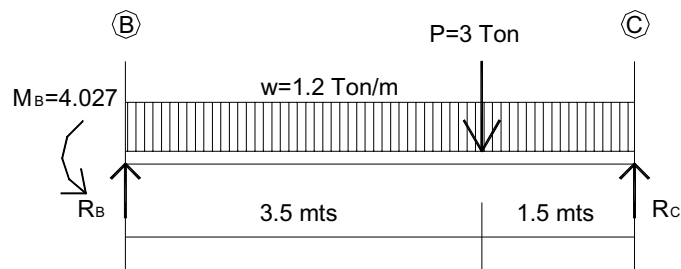
$$\sum F_y = 0$$

$$R_A + R_B - \frac{1}{2} L_1 q = 0$$

$$R_A + (2.208) - \frac{1}{2}(5.0)(2.0) = 0$$

$$\Rightarrow R_A = 2.792 \text{ Ton}$$

Segundo claro, entre los apoyos “B” y “C”



$$\sum M_B = 0$$

$$R_C(L_2) - wL_2\left(\frac{1}{2}L_2\right) - Pa + M_B = 0$$

$$R_C(5.0) - (1.2)(5.0)\left(\frac{1}{2}5.0\right) - (3.0)(3.5) + (4.027) = 0$$

$$5R_C - 15.0 - 10.5 + 4.027 = 0$$

$$\Rightarrow R_C = 4.295 \text{ Ton}$$

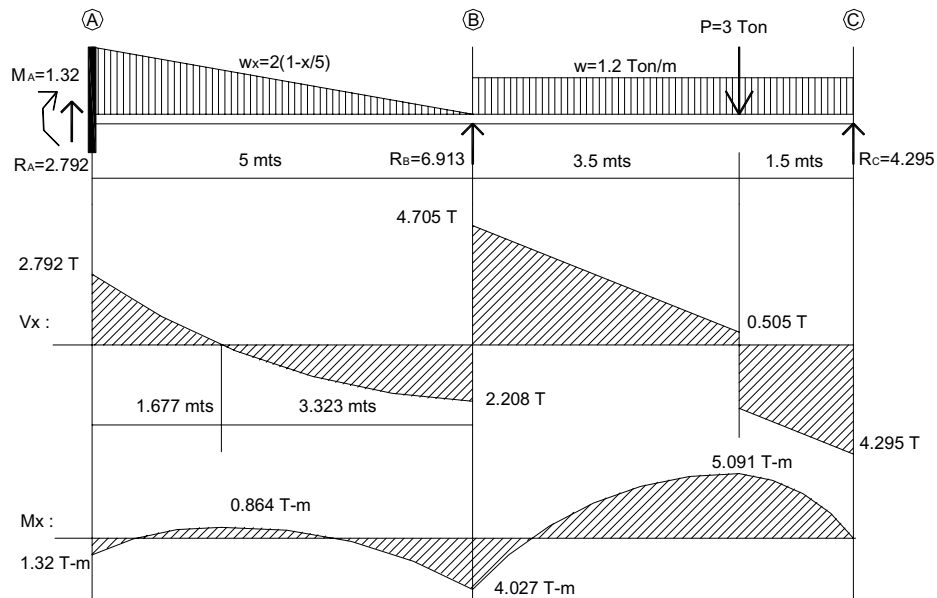
$$\sum F_y = 0$$

$$R_B + R_C - wL_2 - P = 0$$

$$R_B + (4.295) - (1.2)(5.0) - (3.0) = 0$$

$$\Rightarrow R_B = 4.705 \text{ Ton}$$

Finalmente, los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante, quedan determinados de la siguiente manera:



MÉTODO DE TRABAJO VIRTUAL.

INTRODUCCION

DESPLAZAMIENTOS VIRTUALES

Se entenderá por desplazamiento virtual aquel desplazamiento hipotético de uno o varios puntos de un cuerpo rígido en equilibrio. Las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de geometría del cuerpo no se alteran debido a dicho desplazamiento, el cual puede ser de magnitud pequeña o infinitesimal. Dichos desplazamientos son producidos por un sistema de cargas diferente al aplicado al cuerpo rígido en equilibrio. Por lo tanto, el sistema de cargas original se mueve cuando se produce el desplazamiento virtual. El producto de cada carga del sistema original por su desplazamiento virtual respectivo, producirá entonces un **trabajo virtual**. El trabajo efectuado por el sistema en equilibrio (trabajo virtual) durante los desplazamientos virtuales, es cero. Por ello, una reacción “A”:

$$\Delta_A + \delta_A R_A = 0$$

El primer desplazamiento corresponde al desplazamiento producido por el sistema de cargas, si se elimina el apoyo. La segunda deformación corresponde al desplazamiento virtual en el punto de aplicación y en la dirección de la reacción. Esta relación establece que el desplazamiento en el punto de apoyo “A”, es nulo.

TEOREMA DE BETTI

“El trabajo que realiza un sistema de fuerzas A debido a los desplazamientos que en sus puntos de aplicación le produce un sistema de fuerzas B, es igual al trabajo que realiza el sistema de fuerzas B debido a los desplazamientos que en sus puntos de aplicación le produce el sistema de fuerzas A”

Aplicando primero un sistema de fuerzas A, llamado P_i y después un sistema de fuerzas llamado F_j , el trabajo total desarrollado será:

$$W_1 = \frac{1}{2}P_i\delta_i + \frac{1}{2}F_j\delta_j + P_i\delta_{ij}$$

Ahora, si se aplica primero el sistema de fuerzas F_j y después el sistema P_i , entonces, el trabajo total desarrollado será:

$$W_2 = \frac{1}{2}F_j\delta_j + \frac{1}{2}P_i\delta_i + F_j\delta_{ji}$$

Puesto que en los dos casos el trabajo total desarrollado deberá ser igual,

$$W_1 = W_2$$

$$P_i\delta_{ij} = F_j\delta_{ji}$$

Según Maxwell:

“El desplazamiento en un punto A (en la dirección de la fuerza aplicada en A) debido a la aplicación de una fuerza P en el punto B, es igual al desplazamiento en el punto B (en la dirección de la fuerza aplicada en B) debido a la aplicación de una fuerza P en el punto A”

Lo anterior constituye el **Teorema de los desplazamientos recíprocos**.

DESCRIPCION GENERAL.

Suponiendo un marco simple, cuyos apoyos corresponden a empotramientos donde los desplazamientos se suponen nulos, es sometido al empuje de una fuerza P_1 de izquierda a derecha lo cual provoca un desplazamiento δ_1 en dirección a la derecha

DEDUCCION DE LAS ECUACIONES**METODO DEL TRABAJO VIRTUAL**

Este es un método muy versátil para calcular desplazamientos en las estructuras. Estos desplazamientos pueden ser debidos a cargas de cualquier tipo, cambios de temperatura, contracciones en el material estructural o errores de fabricación (en el caso de estructuras de acero o a base de elementos prefabricados).

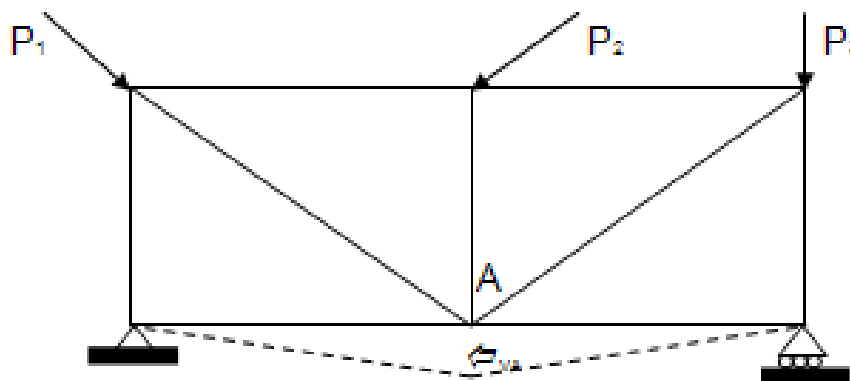
La expresión básica para el método es:

$$\text{TRABAJO VIRTUAL EXTERNO} = \text{TRABAJO VIRTUAL INTERNO}$$

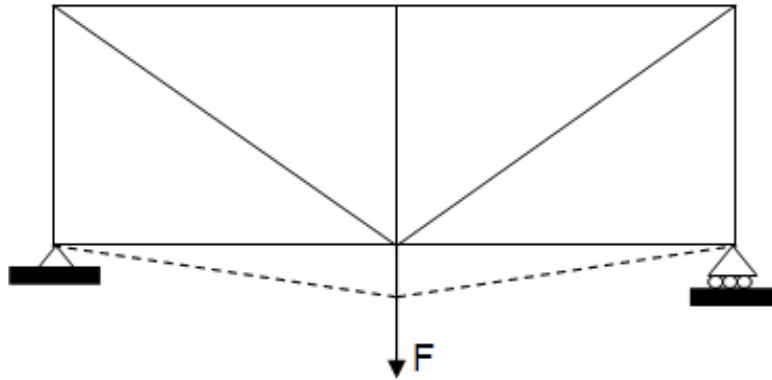
$$W_e = W_i$$

En esta expresión, el primer término se puede determinar por el producto de una carga conocida por el desplazamiento buscado. El segundo término se puede expresar en función de los elementos mecánicos de la estructura, como se indica a continuación.

Considérese la armadura mostrada en la sig. Figura, la cual está sujeta a un sistema de cargas P, y en la cual se desea calcular el desplazamiento vertical Δ_{VA} en el punto A.



Considérese ahora la misma armadura sujeta a una carga F en el punto A y en la dirección de $\square VA$.



Si se denominan como “N” las fuerzas axiales en los elementos, debidas al sistema de cargas “P”, y como “n” las fuerzas axiales en los elementos, debidas a la carga “F”, se tiene, según el teorema de Betti que:

$$W_e = \frac{1}{2} F \delta_{VA}$$

$$W_i = \frac{1}{2} \sum N \left(\frac{nL}{AE} \right)$$

Donde el término con paréntesis es el alargamiento o acortamiento de cada elemento de la estructura debido a la aplicación de la carga “F”. Por lo tanto

$$\frac{1}{2} F \delta_{VA} = \frac{1}{2} \sum N \left(\frac{nL}{AE} \right)$$

Si se da a “F” un valor unitario (aunque puede ser cualquier valor) se tendrá que

$$\delta_{VA} = \sum N \left(\frac{nL}{AE} \right)$$

En forma semejante se pueden establecer las expresiones del trabajo virtual interno para los demás elementos mecánicos y se obtiene:

$$W_i = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx \quad (\text{Flexion})$$

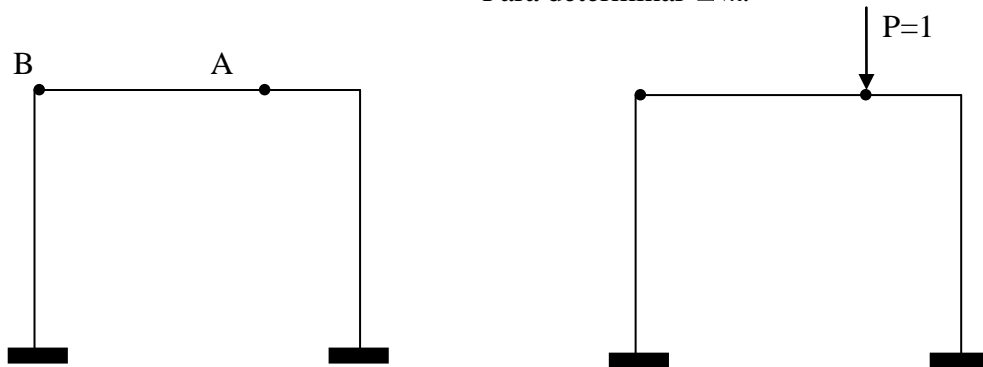
$$W_i = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{cVv}{GA} dx \quad (\text{Cortante})$$

$$W_i = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{Tt}{GJ} dx \quad (\text{Torsion})$$

En las expresiones anteriores, N, M, V y T corresponden a los efectos producidos por la carga real. En forma similar n, m, v y t corresponden a los efectos producidos por las cargas virtuales.

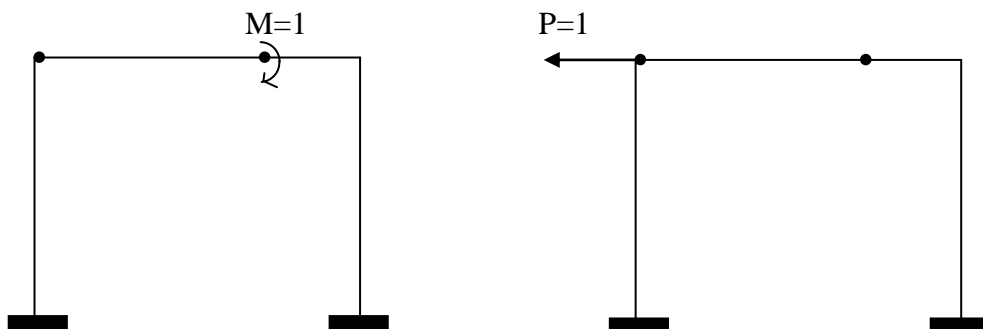
Para determinar los desplazamientos en un punto, simplemente aplicamos una carga correspondiente al tipo de desplazamiento y se calculan los efectos producidos:

Para determinar Δ_{VA} :



Para determinar Δ_A :

Para determinar Δ_{HB} :



Es posible aplicar esta metodología para el cálculo de reacciones en estructuras estáticamente indeterminadas, haciendo uso de la “condición de deformación”. Si en el apoyo empotrado “D” se eliminan las redundantes y en su lugar se aplica una carga unitaria, con ello es posible calcular el desplazamiento por carga real y con la carga unitaria el desplazamiento virtual y mediante una relación del tipo:

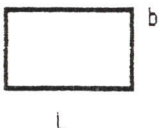
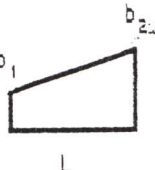
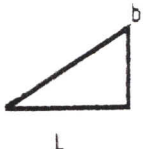
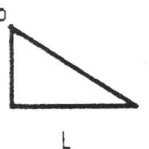
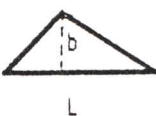
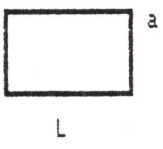
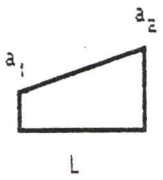
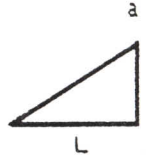
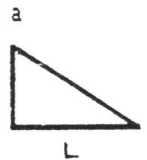
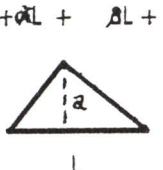
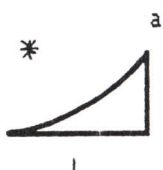
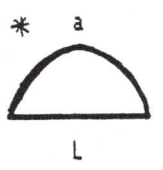
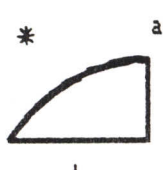
$$\Delta_{VD} + \delta_{VD} R_{VD} = 0$$

Será posible calcular R_{VD}

$$\Delta_{VD} = \int \frac{Mm}{EI} dx$$

$$\delta_{VD} = \int \frac{mm}{EI} dx$$

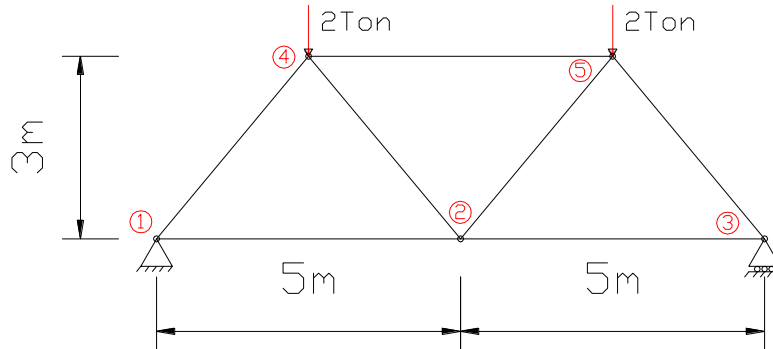
VALORES DE LAS INTEGRALES $\int (M/EI) m \, dl$

m M/EI					
	abl	$\frac{aL}{2} [b_1 + b_2]$	$\frac{1}{2} abl$	$\frac{1}{2} abl$	$\frac{1}{2} abl$
	$\frac{bL}{2} [a_1 + a_2]$	$\frac{L}{6} (2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 2a_2b_2)$	$\frac{bL}{6} [a_1 + 2a_2]$	$\frac{bL}{6} [2a_1 + a_2]$	$\frac{bL}{6} [(1+\beta)a_1 + (1+\alpha)a_2]$
	$\frac{1}{2} abl$	$\frac{aL}{6} [b_1 + 2b_2]$	$\frac{1}{3} abl$	$\frac{1}{6} abl$	$\frac{abl}{6} (1+\alpha)$
	$\frac{1}{2} abl$	$\frac{aL}{6} [2b_1 + b_2]$	$\frac{1}{6} abl$	$\frac{1}{3} abl$	$\frac{abl}{6} (1+\beta)$
	$\frac{1}{2} abl$	$\frac{aL}{6} [(1+\beta)b_1 + (1+\alpha)b_2]$	$\frac{abl}{6} (1+\alpha)$	$\frac{abl}{6} (1+\beta)$	$\frac{1}{3} abl$
	$\frac{1}{3} abl$	$\frac{aL}{12} [b_1 + 3b_2]$	$\frac{1}{4} abl$	$\frac{1}{12} abl$	$\frac{abl}{12} (1+\alpha+\alpha^2)$
	$\frac{2}{3} abl$	$\frac{aL}{3} [b_1 + b_2]$	$\frac{1}{3} abl$	$\frac{1}{3} abl$	$\frac{abl}{3} (1+\alpha\beta)$
	$\frac{2}{3} abl$	$\frac{aL}{12} [3b_1 + 5b_2]$	$\frac{5}{12} abl$	$\frac{1}{4} abl$	$\frac{abl}{12} (5+\beta+\beta^2)$

MÉTODO DE TRABAJO VIRTUAL.

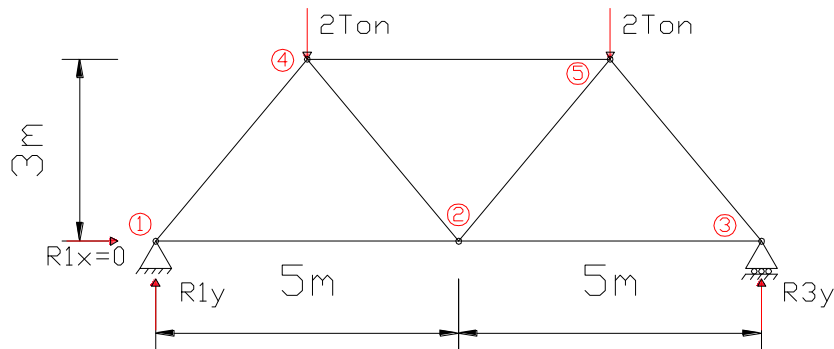
EJECICIO 1

Para la siguiente armadura, Determinar el desplazamiento vertical del Nodo 2, aplicando el método de Trabajo Virtual.



Propiedades de las barras: Todas tienen la misma sección transversal “A” y el mismo material “E”. $EA = \text{Constante}$. Los nodos de la armadura están articulados.

Obtenemos las reacciones en sus apoyos.



Aplicando una sumatoria de fuerzas en el eje “Y” y considerando la simetría de la armadura es fácil determinar las reacciones en los apoyos.

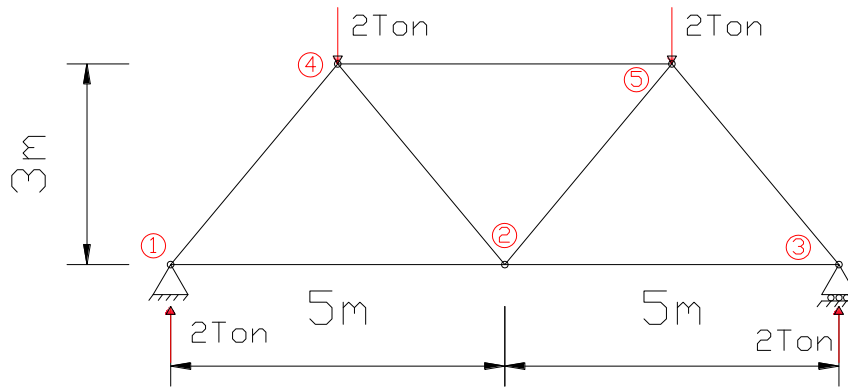
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$R_{1y} = 2\text{Ton}$$

$$R_{3y} = 2\text{Ton}$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$R_{1x} = 0$$



Grado de hiperestaticidad :

$$m = 2j - r$$

$$m = \# \text{ numero de elementos de la armadura} = 7$$

$$j = \# \text{ de Nodos} = 5$$

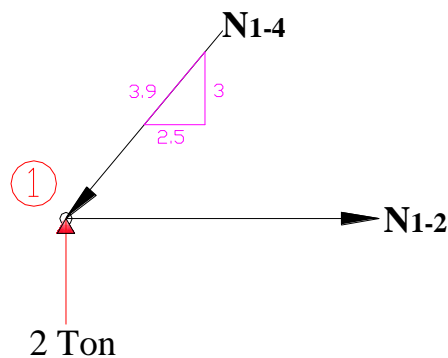
$$r = \# \text{ de Reacciones} = 3$$

$$7 = 2(5) - 3 = 7$$

Si se cumple la igualdad, entonces es una “Armadura Estáticamente Determinada” y por tanto procedemos con el método.

- I. Se hace un 1er análisis de cada nodo, por efecto de la carga real en la armadura para obtener las cargas axiales en sus elementos (N):

Nodo 1.



$$+ \rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$N_{1-2} - (2.5/3.9)N_{1-4} = 0 \quad \dots\dots\dots (a)$$

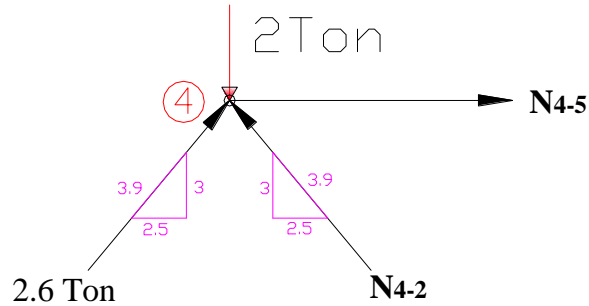
$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$2\text{Ton} - (3/3.9)N_{1-4} = 0 \quad \quad \quad \mathbf{N_{1-4} = 2.6\text{Ton} (C)}$$

Sustituyendo en (a)

$$N_{1-2} - (2.5/3.9)2.6\text{Ton} = 0 \quad \quad \quad \mathbf{N_{1-2} = 1.67\text{Ton} (T)}$$

Nodo 4.



$$+ \rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$-N_{4-5} + (2.5/3.9)2.6\text{Ton} - N_{4-2}(2.5/3.9) = 0$$

$$-N_{4-5} + 1.76\text{Ton} - 0.64N_{4-2} = 0 \dots\dots\dots (b)$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$-2\text{Ton} + (3/3.9)(2.6\text{Ton}) + (3/3.9)N_{4-2} = 0$$

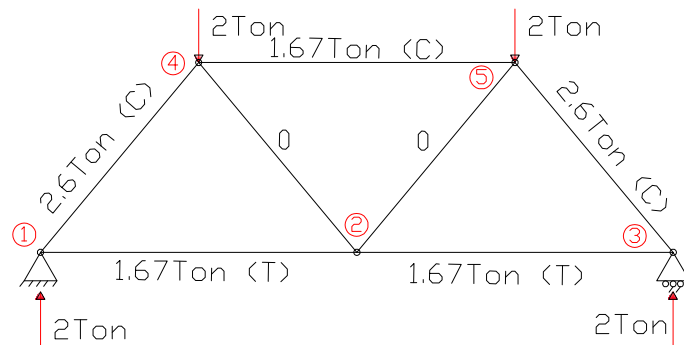
$$0 + (3/3.9)N_{4-2} = 0 \quad \quad \quad N_{4-2} = 0$$

Sustituyendo en (b)

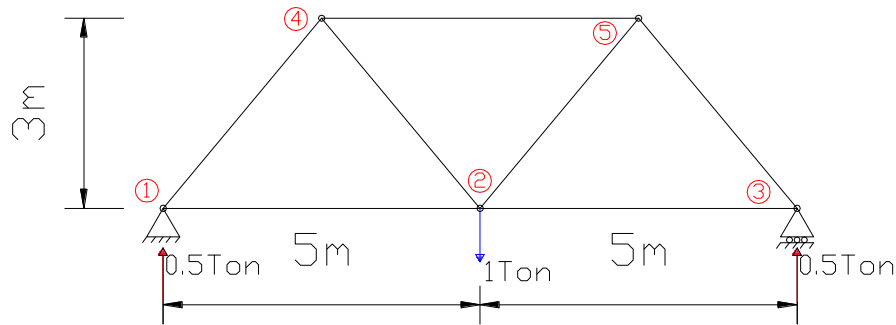
$$-N_{4-5} + 1.76\text{Ton} - 0.64(0) = 0 \quad \quad \quad N_{4-5} = 1.67\text{Ton (C)}$$

***Nota:** Al ser una armadura simétrica, podemos llegar al análisis de los nodos hasta este punto ya que sus simétricos se comportarán de forma igual.

Las fuerzas internas en las barras quedan de la siguiente forma:



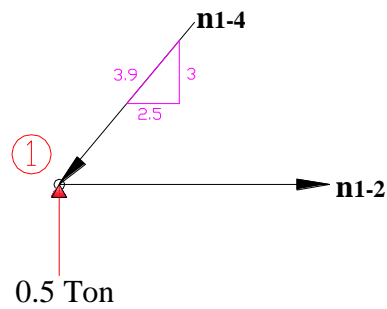
- II. A continuación, se propone la misma armadura quitando las cargas que esta tenía y colocando una carga unitaria saliendo del nodo a evaluar en la dirección que se busca el desplazamiento (vertical o lateral):



De igual manera obtenemos las reacciones en los apoyos para la armadura por la carga virtual, y se procede a analizar los nodos.

III. Segundo análisis con la carga virtual unitaria:

Nodo 1.



$$+ \rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$n_{1-2} - (2.5/3.9)n_{1-4} = 0 \quad \dots\dots\dots(c)$$

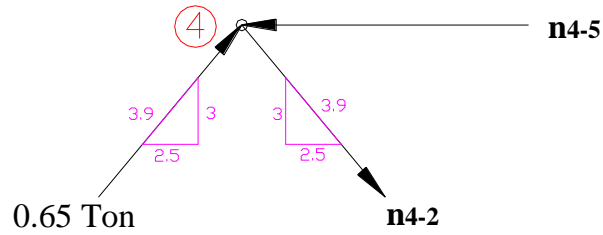
$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$0.5 \text{ Ton} - (3/3.9)n_{1-4} = 0 \quad \quad \quad n_{1-4} = 1.67 \text{ Ton (C)}$$

Sustituyendo en (c)

$$n_{1-2} - (2.5/3.9)1.67 \text{ Ton} = 0 \quad \quad \quad n_{1-2} = 0.42 \text{ Ton (T)}$$

Nodo 4.



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$(3/3.9)(0.65 \text{ Ton}) - (3/3.9)n_{4-2} = 0$$

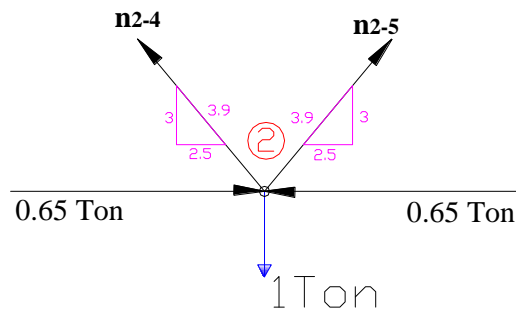
$$n_{4-2} = 0.65 \text{ Ton (T)}$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$-n_{4-5} + 2[(2.5/3.9)0.65 \text{ Ton}] = 0$$

$$n_{4-5} = 0.483 \text{ Ton (C)}$$

Nodo 2 en equilibrio.



$$n_{4-2} = n_{2-4} = n_{2-5} = 0.65 \text{ Ton (T)}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$(3/3.9)(0.65 \text{ Ton}) + (3/3.9)(0.65 \text{ Ton}) - 1 \text{ Ton} = 0$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$0.65 \text{ Ton} - 0.65 \text{ Ton} = 0$$

IV. En base a la expresión par encontrar desplazamientos por carga virtual:

$$\delta_{V2} = \sum N \left(\frac{nL}{AE} \right)$$

Con las fuerzas internas tanto por carga real y carga unitaria son colocadas fuerzas y propiedades de cada una de las barras en una tabla, para facilitar el cálculo.

***Nota:** el signo para cada carga es asignado en base a su comportamiento, sea (+) para los elementos a tensión y (–) elementos a compresión.

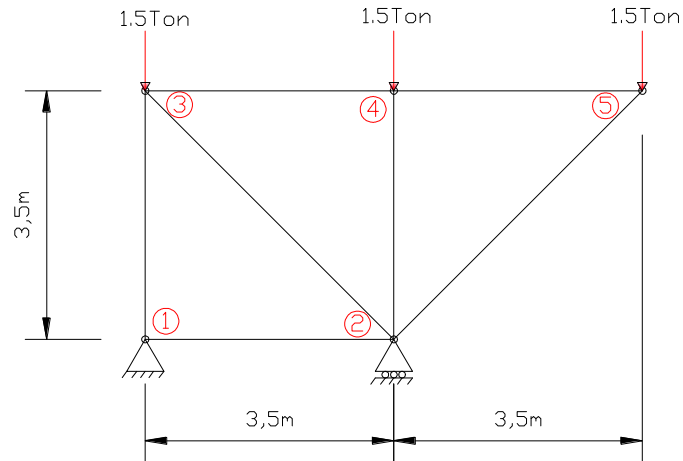
Barra	Longitud(m)	N(Ton)	n(Ton)	(NnL)/AE
1-2	5	+ 1,57	+ 0,42	3,297
2-3	5	+ 1,57	+ 0,42	3,297
4-5	5	- 1,67	- 0,83	6,9305
1-4	3,9	- 2,6	- 0,65	6,591
2-4	3,9	0	+ 0,65	0
2-5	3,9	0	+ 0,65	0
3-5	3,9	- 2,6	- 0,65	6,591
$\Sigma=$				26,71 /AE

$$\delta_{v2} = \frac{26.71}{AE}$$

MÉTODO DE TRABAJO VIRTUAL.

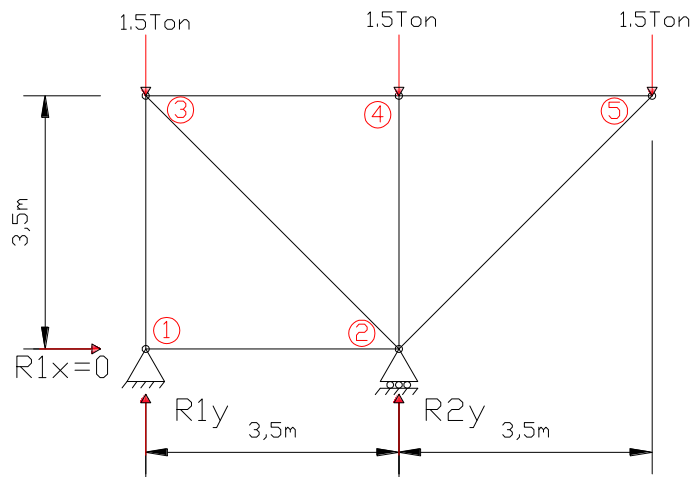
EJECICIO 2

Para la siguiente armadura, Determinar el desplazamiento vertical del Nodo 5, aplicando el método de Trabajo Virtual.



Propiedades de las barras: Todas tienen la misma sección transversal “A” y el mismo material “E”. $EA = \text{Constante}$. Los nodos de la armadura están articulados.

Identificamos las reacciones en sus apoyos.



La armadura no es simétrica por lo que no se presta al cálculo inmediato de las reacciones en los apoyos. Esto se obtendrá del análisis de nodos.

Grado de hiperestaticidad :

$$m = 2j - r$$

$$m = \# \text{ numero de elementos de la armadura} = 7$$

$$j = \# \text{ de Nodos} = 5$$

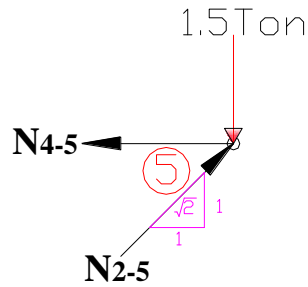
$$r = \# \text{ de Reacciones} = 3$$

$$7 = 2(5) - 3 = 7$$

Si se cumple la igualdad, entonces es una “Armadura Estáticamente Determinada” y por tanto procedemos con el método.

- I. Se hace un 1er análisis de cada nodo, por efecto de la carga real en la armadura para obtener las cargas axiales en sus elementos (N):

Nodo 5.



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$-1.5 \text{ Ton} + N_{2-5} (1/\sqrt{2}) = 0$$

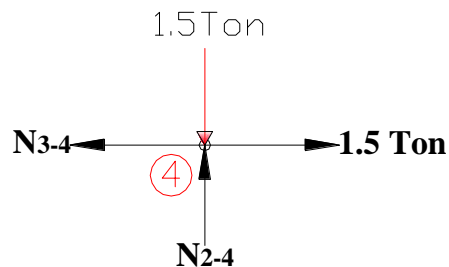
$$N_{2-5} = 2.12 \text{ Ton (C)}$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$-N_{4-5} + (2.12 \text{ Ton})(1/\sqrt{2}) = 0$$

$$N_{4-5} = 1.5 \text{ Ton (T)}$$

Nodo 4.



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

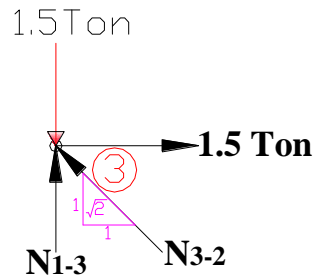
$$-1.5 \text{ Ton} + N_{2-4} = 0$$

$$N_{2-4} = 1.5 \text{ Ton (C)}$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$-N_{3-4} + 1.5 \text{ Ton} = 0$$

$$N_{3-4} = 1.5 \text{ Ton (T)}$$

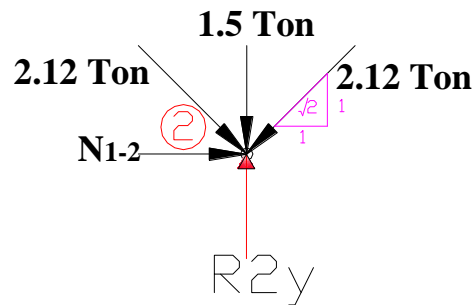
Nodo 3.

$$+ \rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$-N_{2-3}(1/\sqrt{2}) + 1.5\text{Ton} = 0 \quad N_{2-3} = 2.12\text{Ton (C)}$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$-1.5\text{Ton} + 1.5\text{Ton} + N_{1-3} = 0 \quad N_{1-3} = 0$$

Nodo 2.

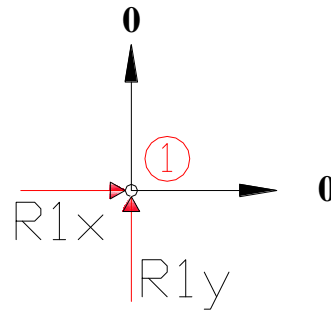
$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$-1.5\text{Ton} + R_{2y} = 0 \quad R_{2y} = 1.5\text{Ton} \uparrow$$

$$+ \rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$N_{1-2} + 2.12\text{Ton} (1/\sqrt{2}) - 2.12\text{Ton} (1/\sqrt{2}) = 0 \quad N_{1-2} = 0$$

Nodo 1.



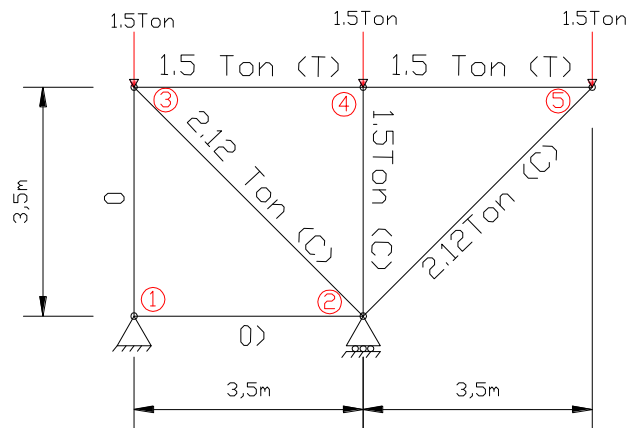
$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$0 + R_{1y} = 0 \quad \quad \quad \mathbf{R_{1y} = 0}$$

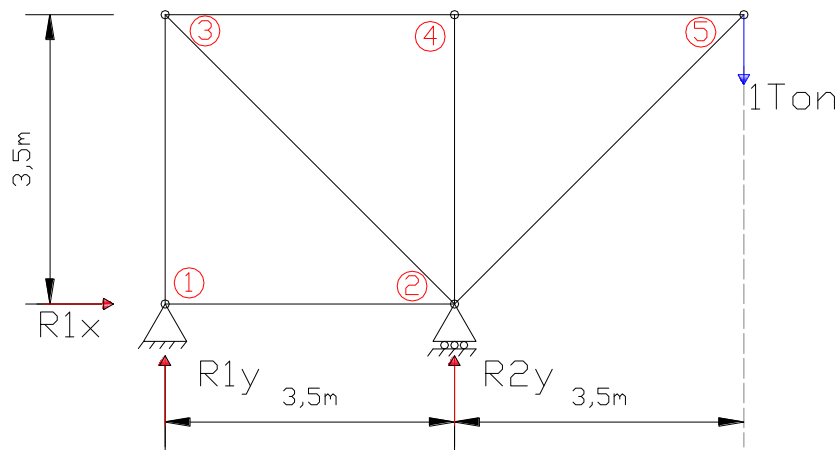
$$+ \rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$R_{1x} + 0 = 0 \quad \quad \quad \mathbf{R_{1x} = 0}$$

Las fuerzas internas en las barras quedan de la siguiente forma:

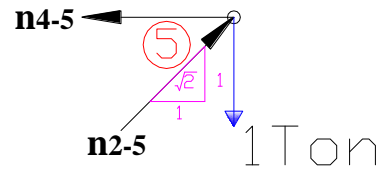


- II. A continuación, se propone la misma armadura quitando las cargas que esta tenía y colocando una carga unitaria saliendo del nodo a evaluar en la dirección que se busca el desplazamiento (vertical o lateral):



III. Segundo análisis con la carga virtual unitaria:

Nodo 5.



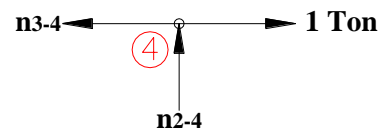
$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$-1 \text{ Ton} + n_{2-5} (1/\sqrt{2}) = 0 \quad n_{2-5} = 1.41 \text{ Ton (C)}$$

$$+ \rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$-n_{4-5} + (1.41 \text{ Ton})(1/\sqrt{2}) = 0 \quad n_{4-5} = 1 \text{ Ton (T)}$$

Nodo 4.



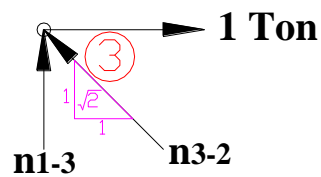
$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$n_{2-4} = 0 \quad n_{2-4} = 0$$

$$+ \rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$-n_{3-4} + 1 \text{ Ton} = 0 \quad n_{3-4} = 1 \text{ Ton (T)}$$

Nodo 3.

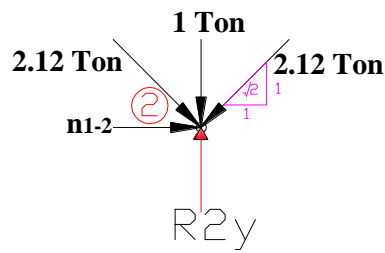


$$+ \rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$-n_{2-3} (1/\sqrt{2}) + 1 \text{ Ton} = 0 \quad n_{2-3} = 1.41 \text{ Ton (C)}$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$-n_{1-3} + 1.41 \text{ Ton} (1/\sqrt{2}) = 0 \quad n_{1-3} = 1 \text{ Ton (T)}$$

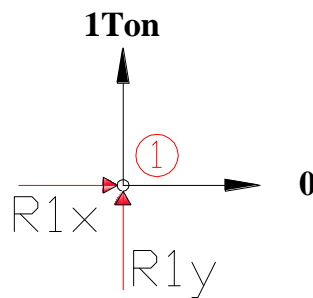
Nodo 2.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$-1.41 \text{ Ton} (1/\sqrt{2}) - 1.41 \text{ Ton} (1/\sqrt{2}) + R_{2y} = 0 \quad \quad \quad \mathbf{R_{2y} = 2 \text{ Ton} \uparrow}$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$n_{1-2} + 1.41 \text{ Ton} (1/\sqrt{2}) - 1.41 \text{ Ton} (1/\sqrt{2}) = 0 \quad \quad \quad \mathbf{n_{1-2} = 0}$$

Nodo 1.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$1 \text{ Ton} + R_{1y} = 0 \quad \quad \quad \mathbf{R_{1y} = 1 \text{ Ton} \downarrow}$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$R_{1x} + 0 = 0 \quad \quad \quad \mathbf{R_{1x} = 0}$$

IV. En base a la expresión par encontrar desplazamientos por carga virtual:

$$\delta_{v2} = \sum N \left(\frac{nL}{AE} \right)$$

Con las fuerzas internas tanto por carga real y carga unitaria son colocadas fuerzas y propiedades de cada una de las barras en una tabla, para facilitar el cálculo.

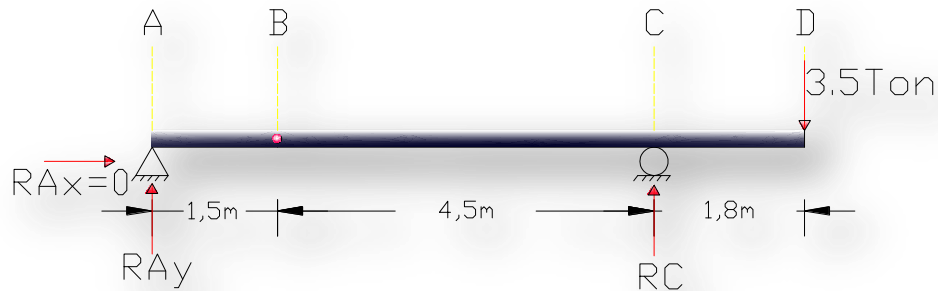
***Nota:** el signo para cada carga es asignado en base a su comportamiento, sea (+) para los elementos a tensión y (–) elementos a compresión.

Barra	Longitud(m)	N(Ton)	n(Ton)	(NnL)/AE
1-2	3,5	0	0	0
1-3	3,5	0	+ 1	0
2-3	4,94	- 2,12	- 1,41	14,766648
2-4	3,5	- 1,5	0	0
2-5	4,94	- 2,12	- 1,41	14,766648
3-4	3,5	+ 1,5	+ 1	5,25
4-5	3,5	+ 1,5	+ 1	5,25
$\Sigma=$				40,03 /AE

$$\delta_{v5} = \frac{40.03}{AE}$$

MÉTODO DE TRABAJO VIRTUAL.**EJECICIO 3**

Para la siguiente viga, Determinar el desplazamiento vertical en B, aplicando el método de Trabajo Virtual.



Propiedades de las barras: Todas comparten el mismo momento de inercia y modulo de elasticidad, $EI = \text{Constante}$.

Obtenemos las reacciones en sus apoyos.

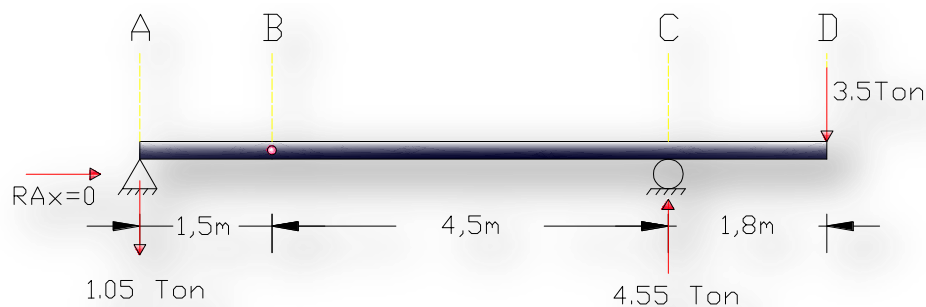
$$\sum M_A = 0$$

$$(-3.5\text{Ton})(7.8\text{m}) + R_C(6\text{m}) = 0$$

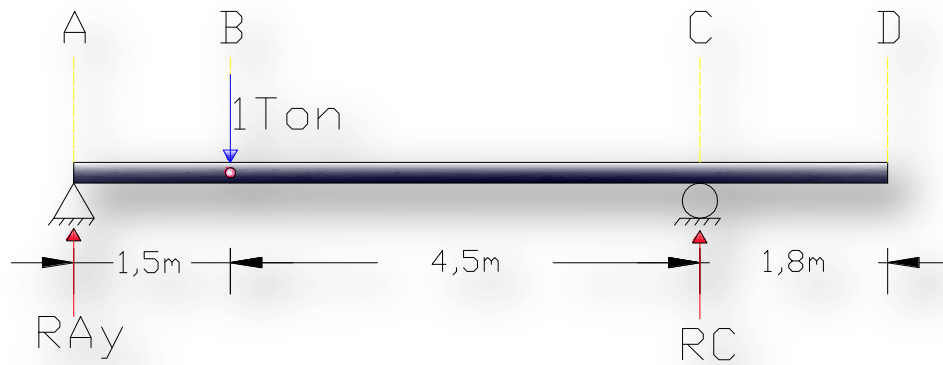
$$R_C = (-3.5\text{Ton})(7.8\text{m}) / (6\text{m}) = 4.55 \text{ Ton} \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$R_{Ay} + 4.55\text{Ton} - 3.5\text{Ton} = 0 \quad R_{Ay} = 1.05 \text{ Ton} \downarrow$$



Para el desplazamiento vertical en el punto "B" ($\delta_v B$) proponemos una viga igual, solo que con una sola fuerza virtual unitaria saliendo del punto B en la dirección que suponemos se desplazara el punto (ya sea positivo \uparrow o negativo \downarrow , el análisis al final lo definirá).



Obtenemos las reacciones en sus apoyos.

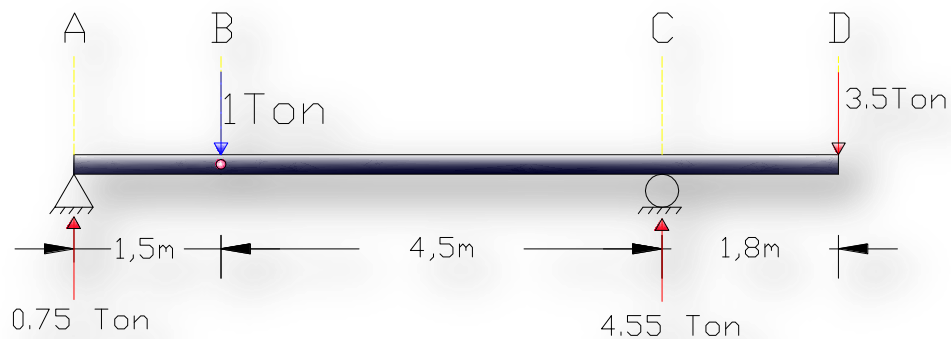
$$\sum M_A = 0$$

$$(-1\text{Ton})(1.5\text{m}) + R_C(6\text{m}) = 0$$

$$R_C = (-1\text{Ton})(1.5\text{m}) / (6\text{m}) = \mathbf{0.25\text{ Ton}\uparrow}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$R_{Ay} + 0.25\text{Ton} - 1\text{Ton} = 0 \quad \mathbf{R_{Ay} = 0.75\text{ Ton}\uparrow}$$



Aplicando la siguiente expresión para elementos a flexión en trabajo virtual será posible obtener el desplazamiento buscado.

$$\delta v_B = \int \frac{M_x m_x}{EI} dx$$

M_x = ecuación de momento por carga real.

m_x = ecuación de momento por carga virtual.

- I. Para cada tramo de la viga se obtiene su correspondiente ecuación de momento tanto para carga real como para carga virtual, que dando expresado en la siguiente tabla:

Tramo	Rango "X"	Ec. Mx	Ec. mx
AB	$0 < x < 1,5$	$-1,05X$	$0,75X$
BC	$1,5 < x < 6$	$-1,05X$	$0,75X - (X - 1,5)$
DC	$0 < x < 1,8$	$-3,5X$	0

- II. A continuación, sustituimos las ecuaciones de momento en la expresión de desplazamiento virtual para resolver las integrales.

$$\delta v_B = \int_0^{1.5} \frac{(-1.05X)(0.75x)}{EI} dx + \int_{1.5}^6 \frac{(-1.05X)(-0.25X + 1.5)}{EI} dx + \int_0^{1.8} \frac{(-3.5X)(0)}{EI} dx$$

$$EI\delta v_B = \int_0^{1.5} (-1.05X)(0.75x) dx + \int_{1.5}^6 (-1.05X)(-0.25X + 1.5) dx$$

$$EI\delta v_B = - \int_0^{1.5} 0.78X^2 dx - \int_{1.5}^6 0.26X^2 dx - \int_{1.5}^6 1.57X dx$$

$$EI\delta v_B = - \int_0^{1.5} 0.78X^2 dx - \int_{1.5}^6 0.26X^2 dx - \int_{1.5}^6 1.57X dx$$

$$EI\delta v_B = - \left. \frac{0.78X^3}{3} \right|_0^{1.5} + \left. \frac{0.26X^3}{3} \right|_{1.5}^6 - \left. \frac{1.57X^2}{2} \right|_{1.5}^6$$

$$EI\delta v_B = \frac{-0.78(1.5^3 - 0^3)}{3} + \frac{0.26(6^3 - 1.5^3)}{3} - \frac{1.57(6^2 - 1.5^2)}{2} = -8.943$$

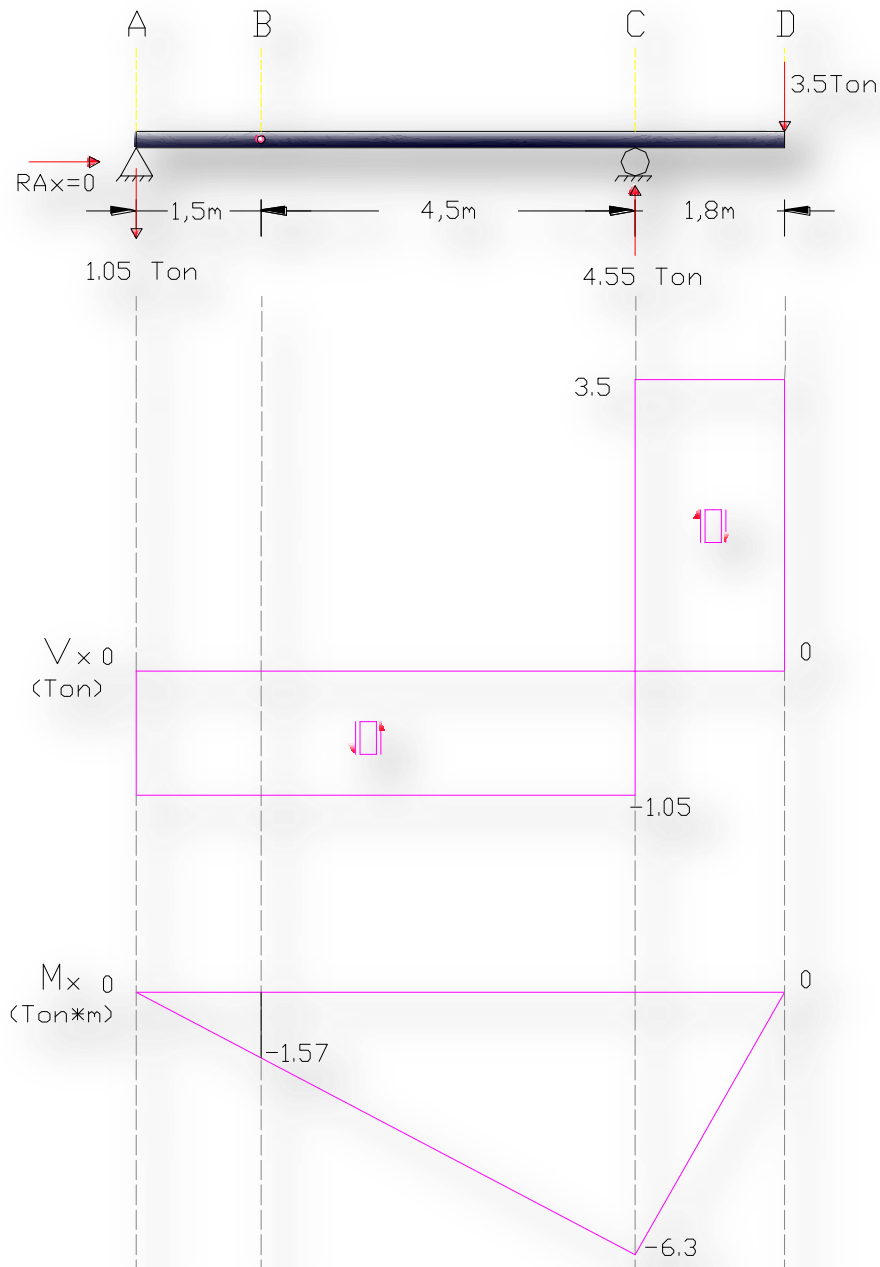
$$\delta v_B = \frac{8.943}{EI}$$

***Nota:**

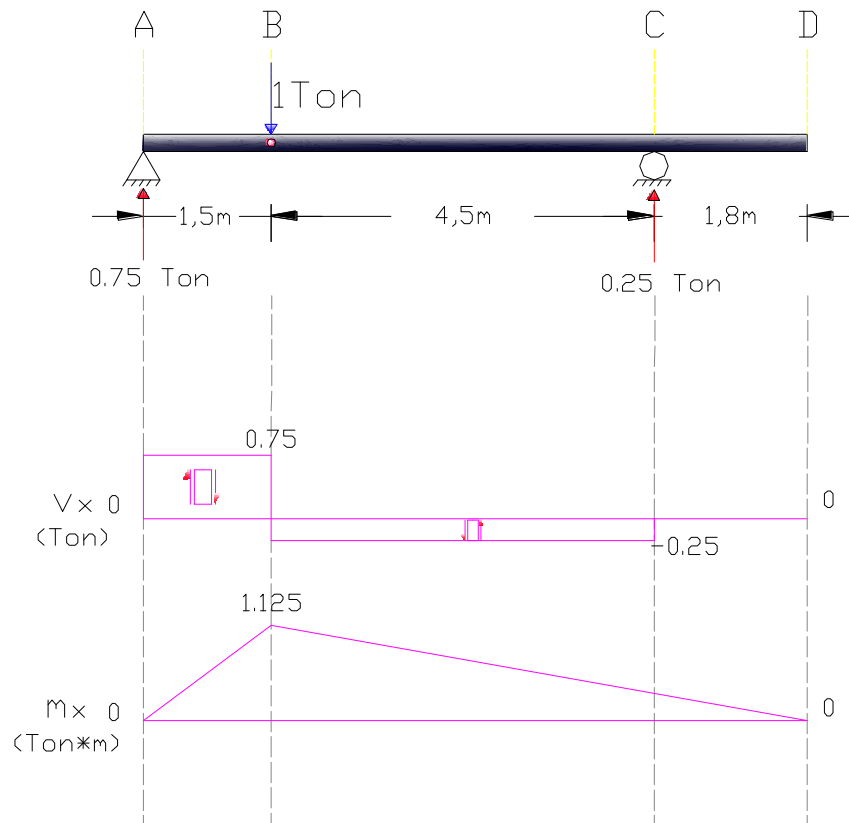
El signo negativo indica, que la dirección en que propusimos el desplazamiento es contraria, solo hay que cambiar la dirección del desplazamiento supuesto.

- III. Otra forma de obtener desplazamientos es por medio de los diagramas de momentos, por carga real y virtual, generando una serie de polígonos que en base a formulas de una tabla que contiene los polígonos por momento mas frecuentes, facilita bastante el calculo, sin la necesidad de integrales, la limitante esta en que para ciertas combinaciones de carga, se forman polígonos irregulares que no están considerados en las tablas antes mencionadas y anexas al ejercicio.

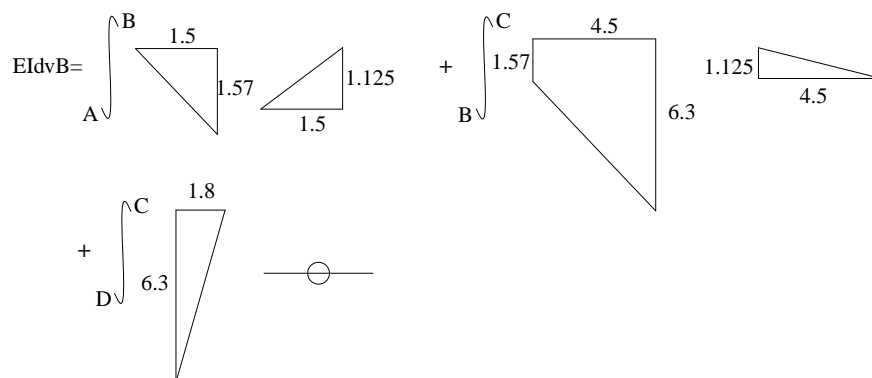
Diagramas por carga real:



Diagramas por carga virtual:



Para entrar a la tabla es necesario conocer la longitud del tramo y la magnitud del momento para cada polígono y queda expresado de la siguiente forma:



Aun queda expresado como una “integral” ahora en base a las formulas que se encuentran en las tablas sustituimos y combinamos:

Por ejemplo, para los polígonos del tramo AB ubicamos el primero que corresponde al producido por carga real en la columna 3, el segundo por carga virtual lo ubicamos en la fila 3, esto es la combinación 3,3 por lo que usamos la expresión o formula en ese cruce.

$$EI\delta vB = \frac{-1abL}{3} + \frac{bL(2a_1 + a_2)}{6} + 0$$

$$EI\delta vB = \frac{-1(1.57)(1.125)(1.5)}{3} - \frac{(1.125)(4.5)(2(1.57) + 6.3)}{6} + 0 = -8.84$$

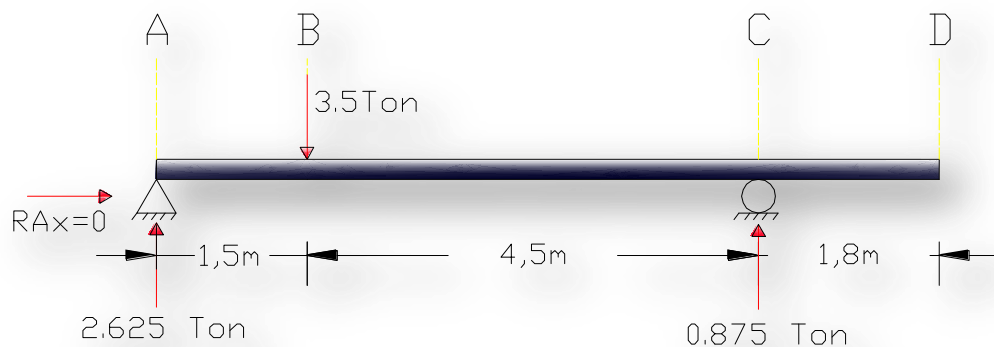
$$\delta vB = \frac{8.84}{EI}$$

Haciendo una comparación con el método de las integrales al final el resultado es muy similar, pero relativamente mas sencillo, queda a criterio de cada quien, cuando utilizar alguno de los 2 métodos, incluso una combinación de ambos.

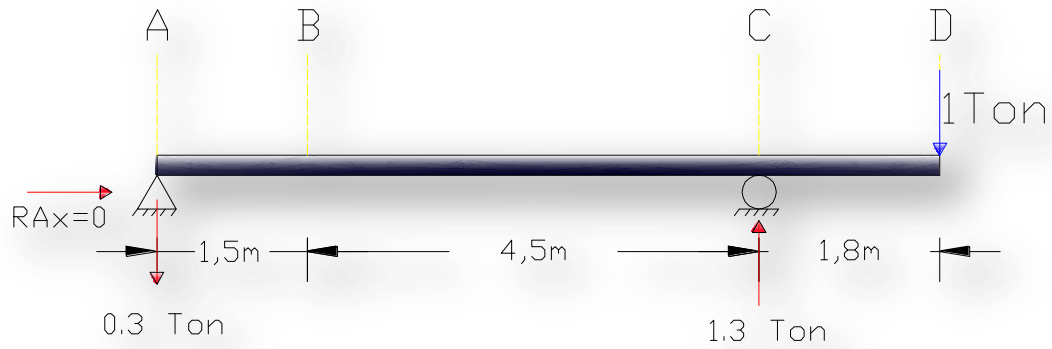
Comprobando el teorema de Maxwell.

Para la misma viga, se aplica la misma carga donde antes fue evaluado el desplazamiento (δvB) y ahora será evaluado en el punto donde antes recaía la carga puntual (δvD). En teoría deberá ser el mismo desplazamiento.

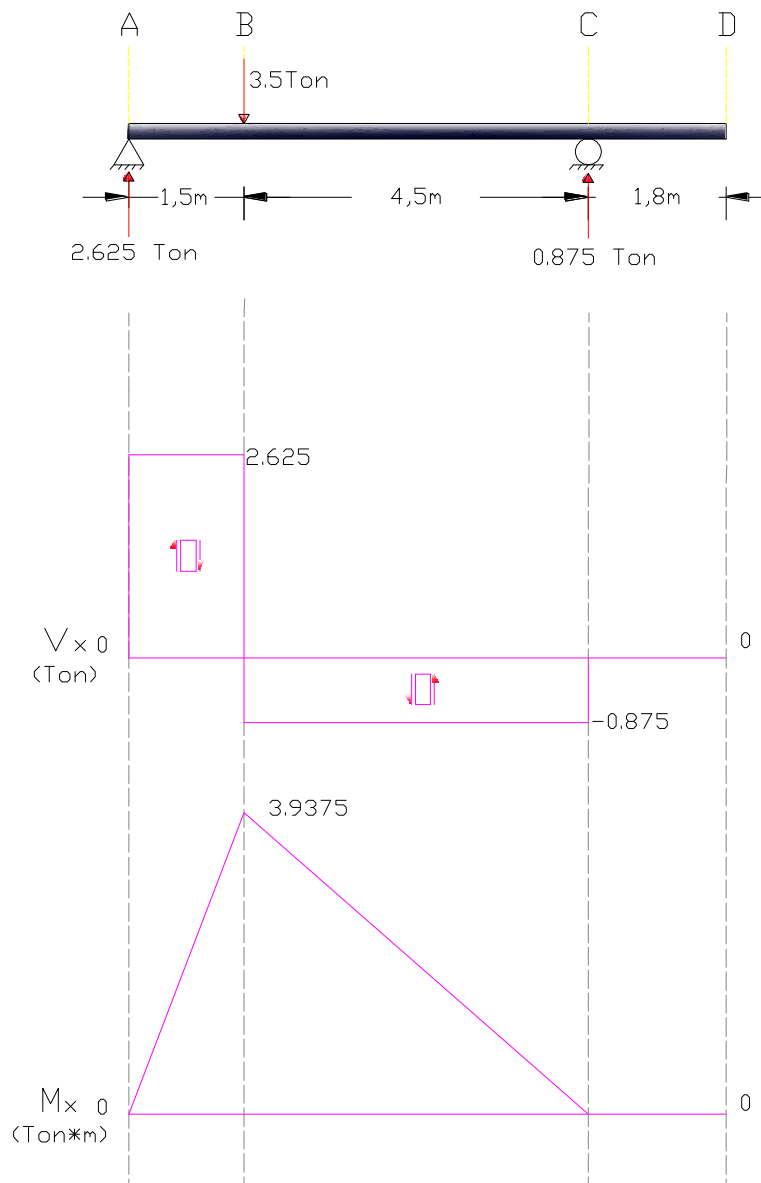
Reacciones en los apoyos (obtenidos de las ecuaciones de la estática).

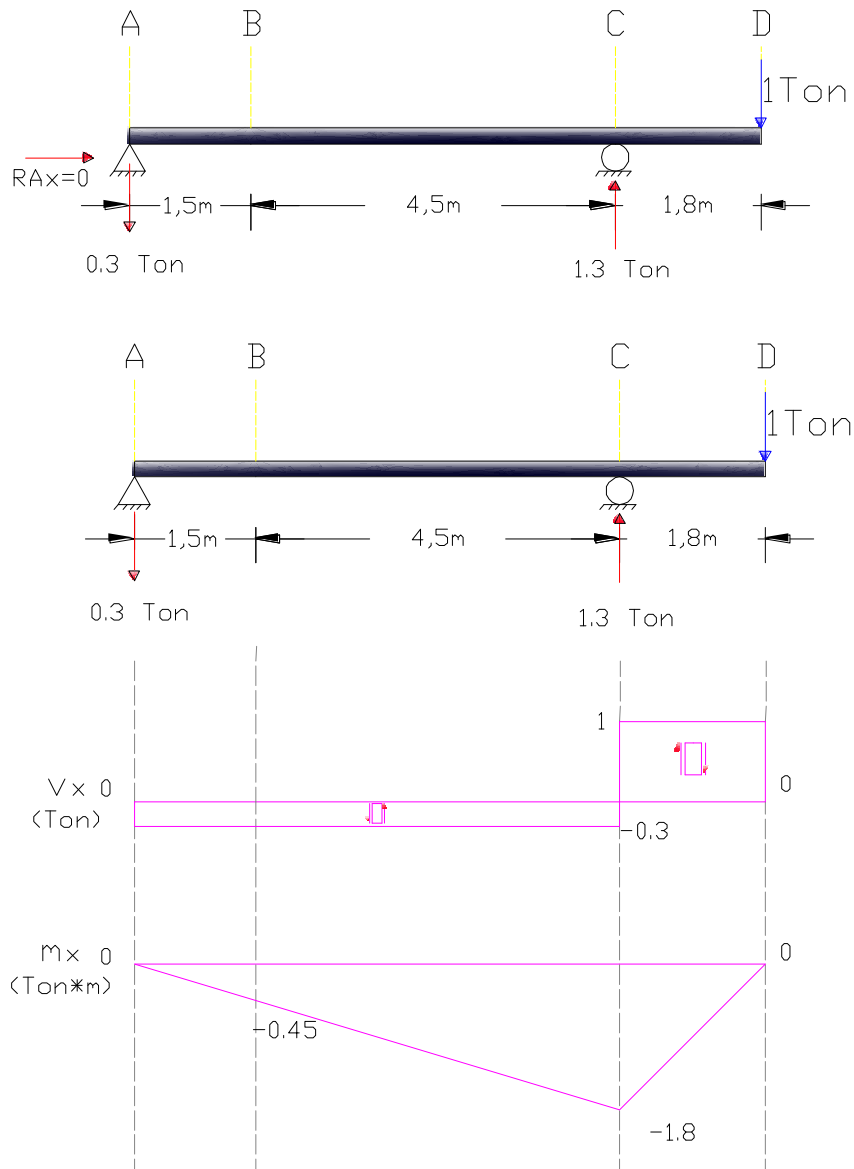


CARGA VIRTUAL



Para este análisis utilizaremos la tabla así que aquí se presentan los diagramas de momento por carga real y carga virtual.





Identificación de los polígonos y sus dimensiones para la tabla:

$$\begin{aligned}
 EIdv_B = & \int_A^B \begin{array}{c} \text{Triangle} \\ \text{Base: } 1.5, \text{ Height: } 3.9375 \end{array} + \int_B^C \begin{array}{c} \text{Triangle} \\ \text{Base: } 4.5, \text{ Height: } 3.9375 \end{array} \\
 & + \int_C^D \begin{array}{c} \text{Triangle} \\ \text{Base: } 1.8, \text{ Height: } 1.8 \end{array}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo valores en las formulas dadas por la tabla:

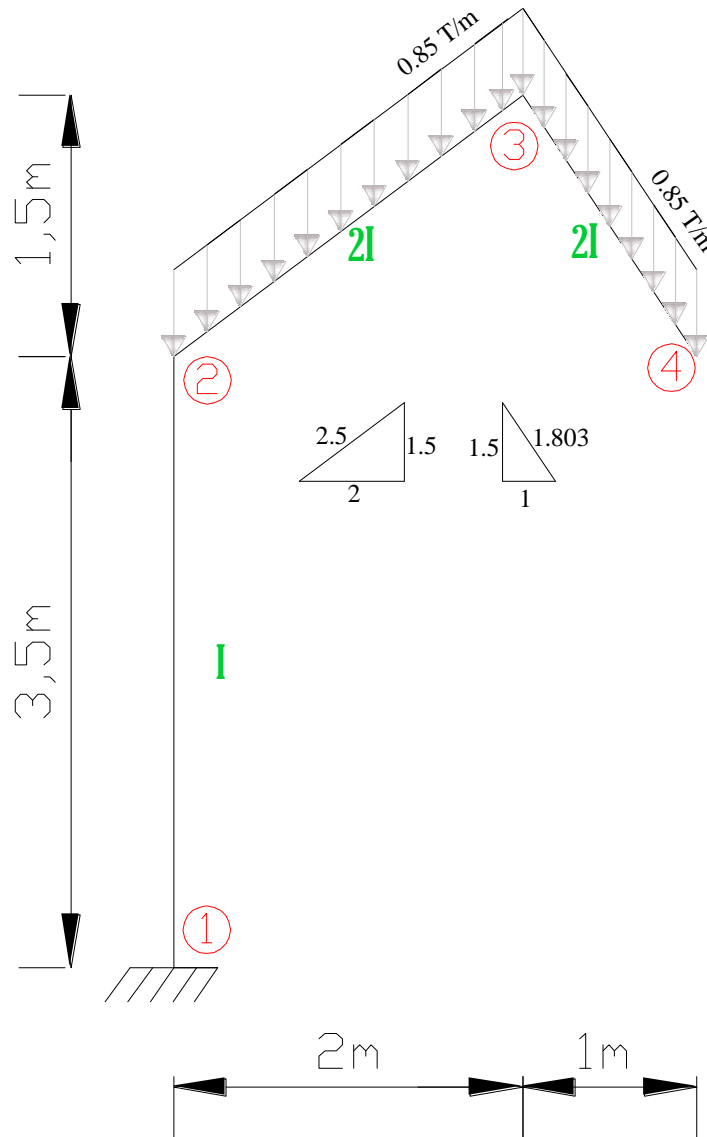
$$EI\delta vD = \frac{-1 (3.95)(0.45)(1.5)}{3} - \frac{(3.95)(4.5)(2(0.45) + 1.8)}{6} + 0 = -8.88$$
$$EI\delta vD = 8.88$$

$$EI\delta vB = 8.84 \approx EI\delta vD = 8.88$$

$$\delta vB = \frac{8.88}{EI}$$

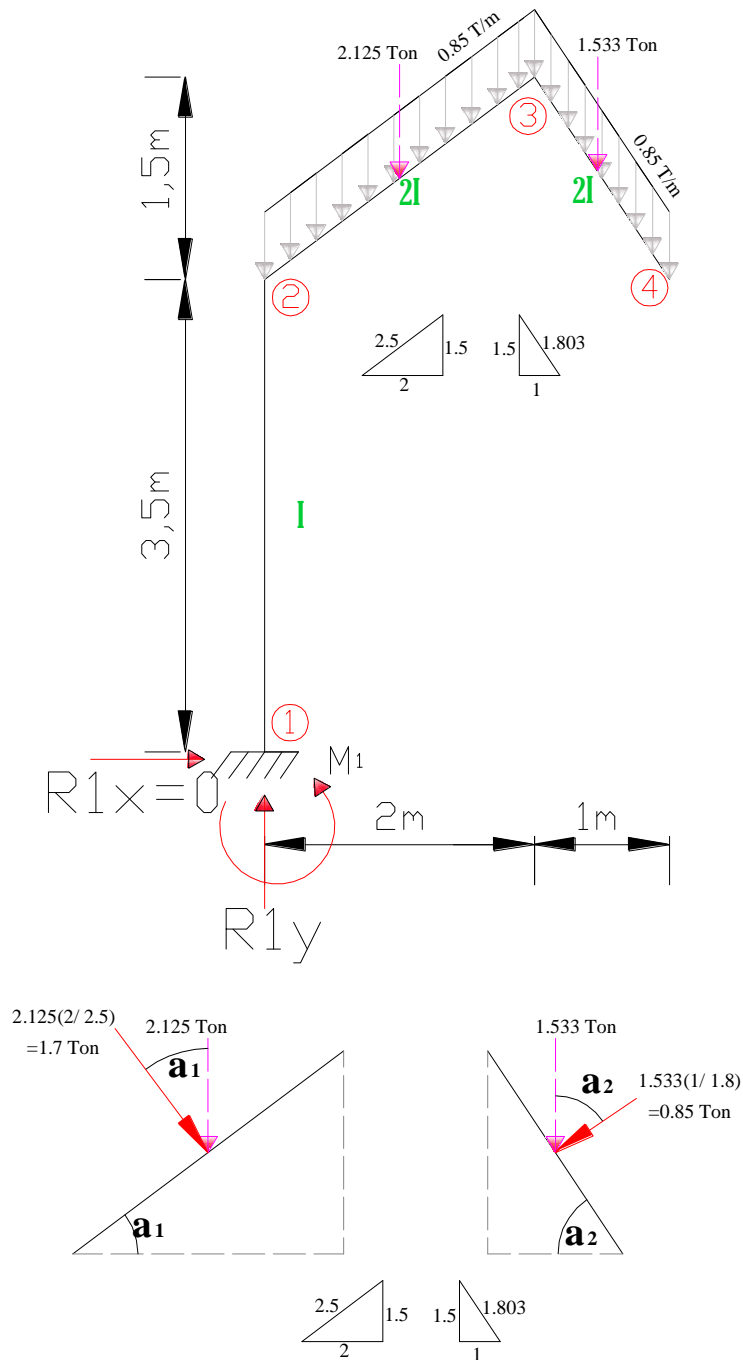
MÉTODO DE TRABAJO VIRTUAL.**EJECICIO 4**

Determinar el desplazamiento vertical en el punto “4” (δ_{v4}), aplicando el método de Trabajo Virtual, en la siguiente estructura.



Propiedades de las barras: El momento de inercia para cada barra esta indicado. Todas las barras comparten el mismo modulo de elasticidad (E).

Obtenemos las reacciones en sus apoyos.



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

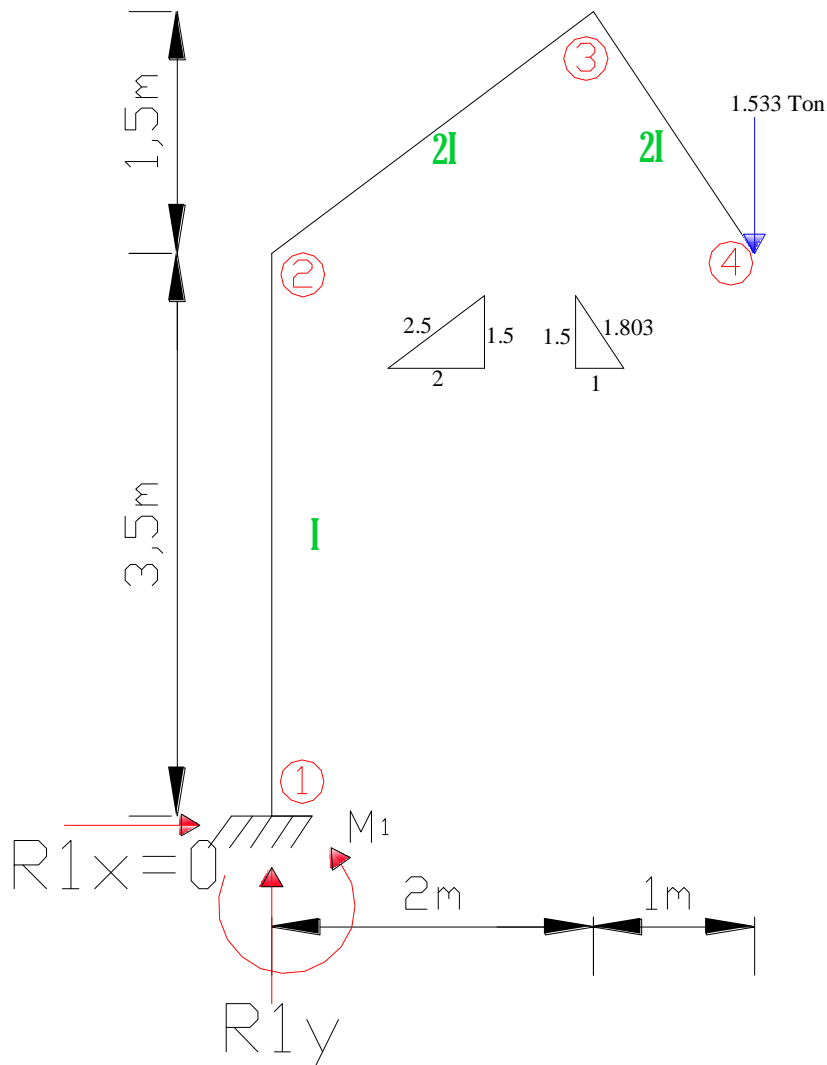
$$R_{1y} = (0.85 \text{ Ton/m})(2.5 \text{ m}) + (0.85 \text{ Ton/m})(1.803 \text{ m}) = 2.125 \text{ Ton} + 1.533 \text{ Ton}$$

$$R_{1y} = 3.658 \text{ Ton.} \uparrow$$

$$M_1 = 0$$

$$M_1 = (2.125 \text{ Ton})(1 \text{ m}) + (1.533 \text{ Ton})(2.5 \text{ m}) = 2.125 \text{ T} \cdot \text{m} + 3.833 \text{ T} \cdot \text{m} = 5.958 \text{ T} \cdot \text{m}$$

Para el desplazamiento vertical en el punto “4” (δv_4) proponemos una estructura igual, solo que con una sola fuerza virtual unitaria saliendo del punto 4 en la dirección que suponemos se desplazara el punto (ya sea positivo \uparrow o negativo \downarrow , el análisis al final lo definirá).



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$R_{1y} = 1 \text{ Ton.} \uparrow$$

$$\curvearrowleft \Sigma M_1 = 0$$

$$M_1 = (1 \text{ Ton})(3 \text{ m}) = 3 \text{ T} \cdot \text{m}$$

Aplicando la siguiente expresión para elementos a flexión en trabajo virtual será posible obtener el desplazamiento buscado.

$$\delta v_4 = \int \frac{M_x m_x}{EI} dx$$

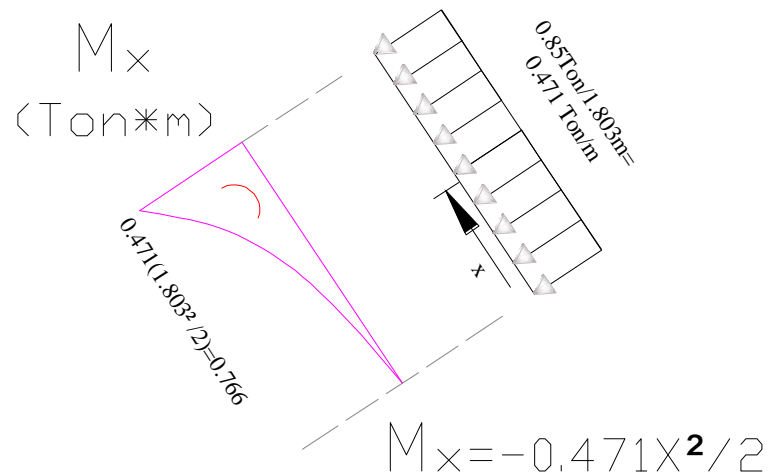
M_x =ecuación de momento por carga real.

m_x =ecuación de momento por carga virtual.

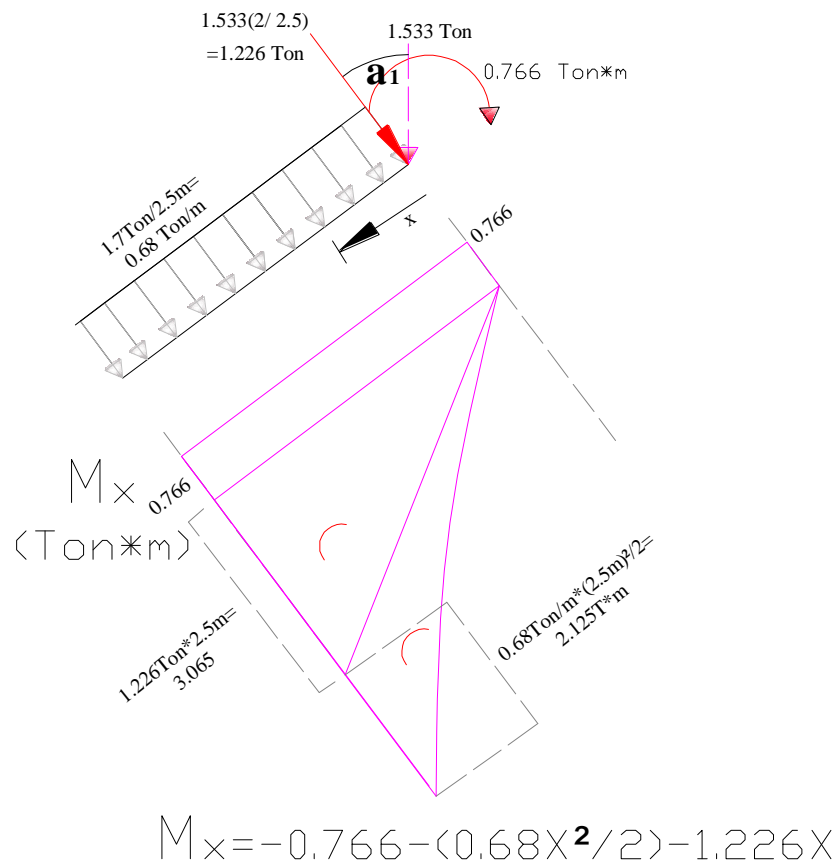
- I. Para cada tramo de la viga se obtiene su correspondiente diagrama de momentos y ecuación de momentos, tanto para carga real como para carga virtual:

Por carga real:

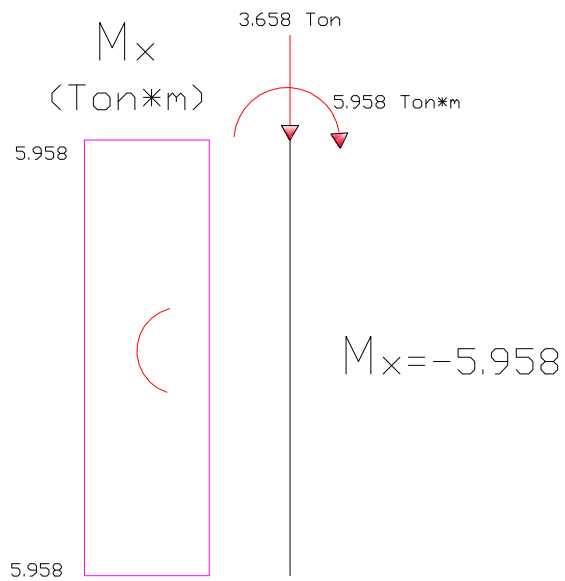
Tramo 4-3.



Tramo 3-2.

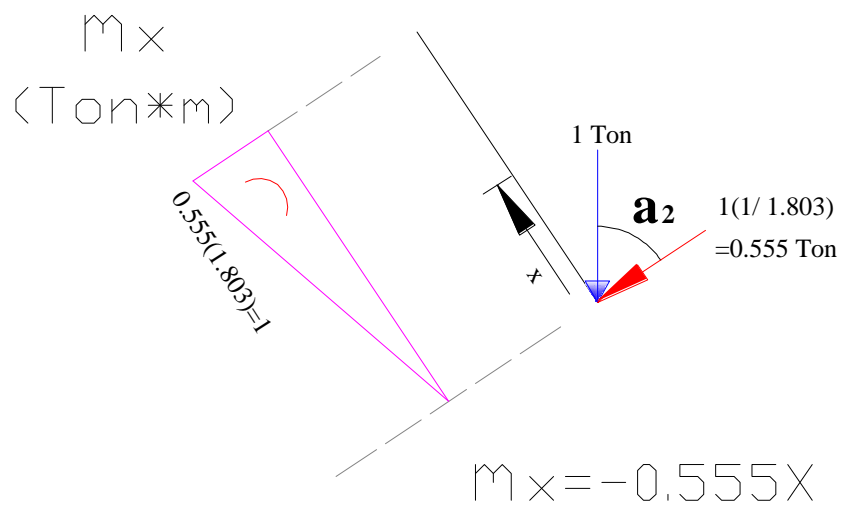


Tramo 2-1.

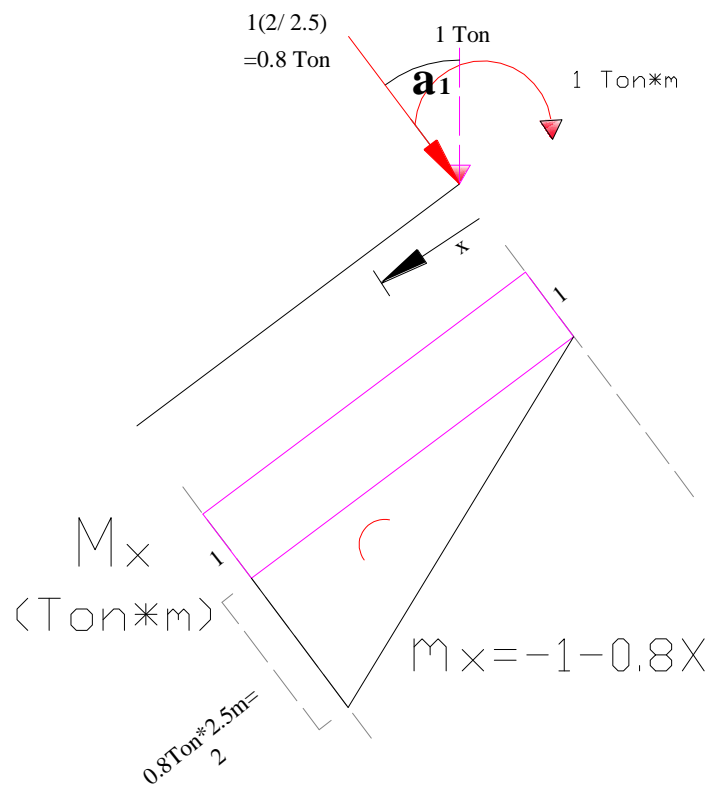


Por carga Virtual:

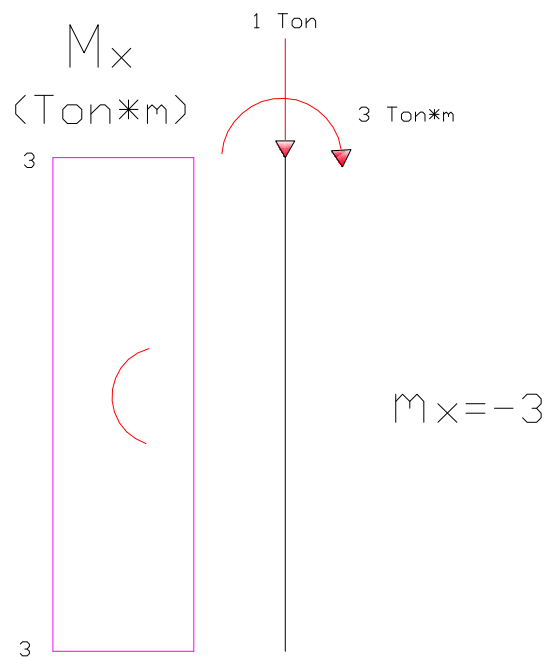
Tramo 4-3.



Tramo 3-2.



Tramo 2-1.



Tramo	Rango "X"	Ec. Mx	Ec. mx
4-3	$0 < x < 1,803$	$-0,471X^2/2$	$0,555X$
3-2	$0 < x < 2,5$	$-0,766-1,226X-(0,68X^2/2)$	$-1-0,8X$
2-1	$0 < x < 3,5$	$-5,958$	-3

- II. A continuación, sustituimos las ecuaciones de momento en la expresión de desplazamiento virtual para resolver las integrales.

$$\begin{aligned}
 \delta v_4 &= \frac{1}{EI} \int_0^{1.803} \frac{(-0.471X^2)(-0.555X)}{2} dx \\
 &\quad + \frac{1}{EI} \int_0^{2.5} \left(-0.766 - 1.266X - \frac{0.68X^2}{2} \right) (-1 - 0.8X) dx \\
 &\quad + \frac{1}{EI} \int_0^{3.5} (-5.958)(-3) dx \\
 EI\delta v_4 &= \int_0^{1.803} \frac{(0.471)(0.555)X^3}{4} dx \\
 &\quad + \int_0^{2.5} \left(\frac{0.766}{2} + \frac{(0.766)(0.8X)}{2} + \frac{1.266X}{2} + \frac{(1.266)(0.8)X^2}{2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{0.68X^2}{4} + \frac{(0.68)(0.8)X^3}{4} \right) dx + \int_0^{3.5} (5.958)(3) dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 EI\delta v_4 &= 0.17265 + 0.9575 + 0.9575 + 1.9781 + 2.6375 + 0.8854 + 1.3281 \\
 &\quad + 62.559 = \mathbf{71.476}
 \end{aligned}$$

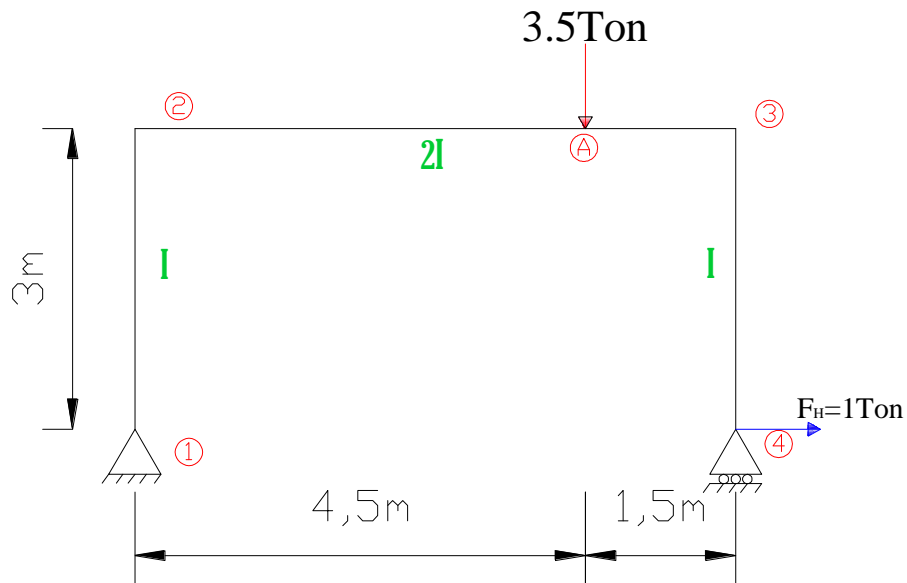
$$\delta v_4 = \frac{\mathbf{71.476}}{EI}$$

***Nota:**

El signo positivo indica, que la dirección en que propusimos el desplazamiento es correcta.

MÉTODO DE TRABAJO VIRTUAL.

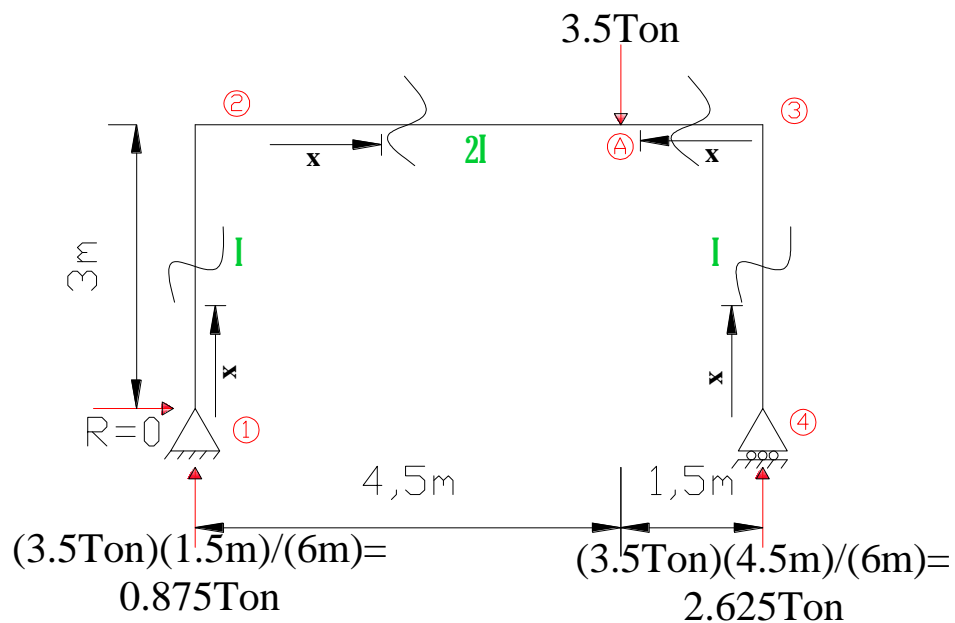
Determinar el desplazamiento horizontal en el punto "4" (δ_{H4}), aplicando el método de Trabajo Virtual, en el siguiente marco.



Propiedades de las barras: El momento de inercia para cada barra esta indicado. Todas las barras comparten el mismo modulo de elasticidad (E).

1. Por carga real:

Obtenemos las reacciones en sus apoyos y ecuación de momentos de cada tramo.



$$\sum M_1 = 0$$

$$-(3.5\text{Ton})(4.5\text{m}) + (R_4)(6\text{m}) = 0$$

$$R_4 = 2.625\text{Ton} \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-3.5\text{Ton} + 2.625\text{Ton} + R_1 = 0$$

$$R_1 = 0.875\text{Ton} \uparrow$$

Ecuaciones por tramo:

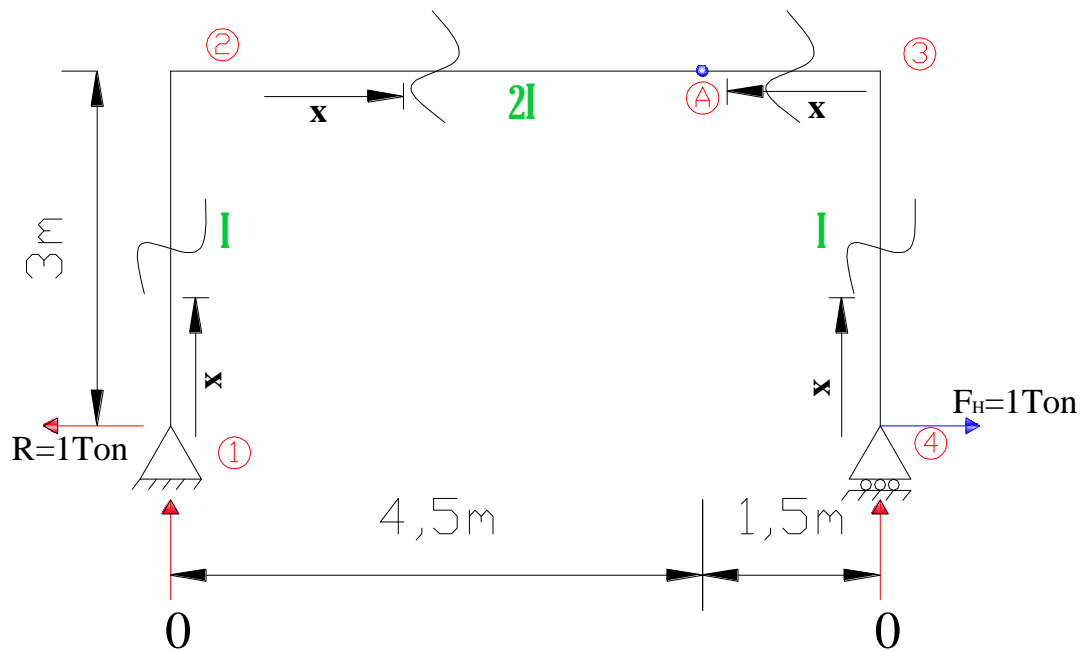
$$1-3 \quad M_x = 0; 0 \leq X \leq 3$$

$$2-A \quad M_x = 0.875X; 0 \leq X \leq 4.5$$

$$4-3 \quad M_x = 0; 0 \leq X \leq 3$$

$$3-A \quad M_x = 2.625X; 0 \leq X \leq 1.5$$

2. Por carga virtual F_H :



$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0$$

$$1\text{ Ton} + R = 0$$

$$R = 1\text{Ton} \leftarrow$$

Ecuaciones por tramo:

$$1-3 \quad M_x = X; 0 \leq X \leq 3$$

$$2-A \quad M_x = 3; 0 \leq X \leq 4.5$$

$$4-3 \quad M_x = X; 0 \leq X \leq 3$$

$$3-A \quad M_x = 3; 0 \leq X \leq 1.5$$

Tramo	Rango "X"	Ec. M_x	Ec. m_x	l
1-2	$0 \leq X \leq 3$	0	X	1
2-A	$0 \leq X \leq 4.5$	$0,875X$	3	2
4-3	$0 \leq X \leq 3$	0	X	1
3-A	$0 \leq X \leq 1.5$	$2,625X$	3	2

3. A continuación, sustituimos las ecuaciones de momento en la expresión de desplazamiento virtual para resolver las integrales.

$$\delta H_4 = \int_0^3 \frac{(0)(X)}{EI} dx + \int_0^{4.5} \frac{(0.875X)(3)}{E2I} dx + \int_0^3 \frac{(0)(X)}{EI} dx + \int_0^{1.5} \frac{(2.625X)(3)}{E2I} dx$$

$$\begin{aligned} EI\delta H_4 &= \int_0^{4.5} \frac{(0.875X)(3)}{2} dx + \int_0^{1.5} \frac{(2.625X)(3)}{2} dx = \frac{2.625X^2}{4} \Big|_0^{4.5} + \frac{7.875X^2}{4} \Big|_0^{1.5} \\ &= \frac{2.625(4.5)^2}{4} + \frac{7.875(1.5)^2}{4} = 17.71875 \end{aligned}$$

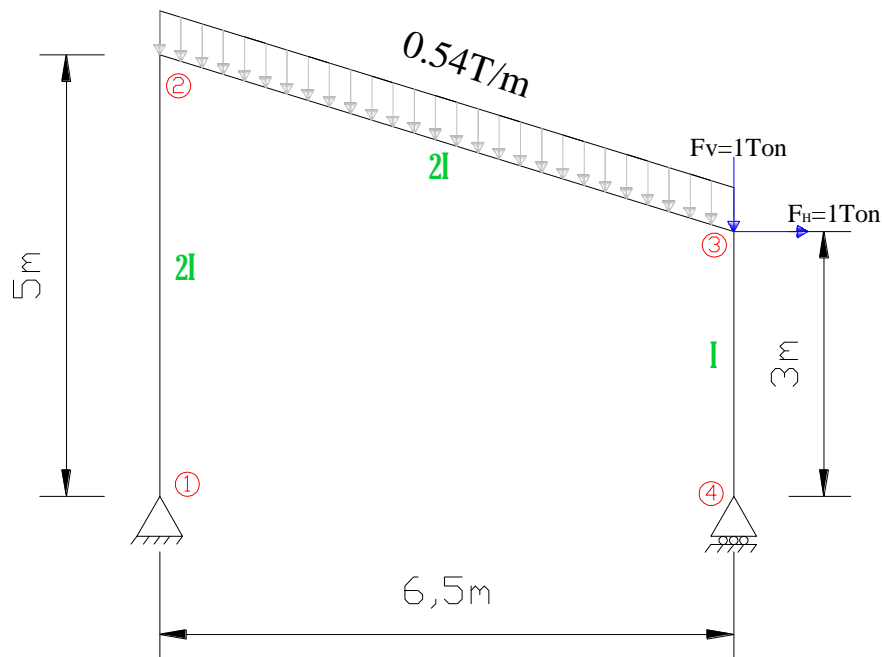
$$\delta H_4 = + \frac{17.71875}{EI}$$

***Nota:**

El signo positivo indica, que la dirección en que propusimos el desplazamiento es correcta.

MÉTODO DE TRABAJO VIRTUAL.

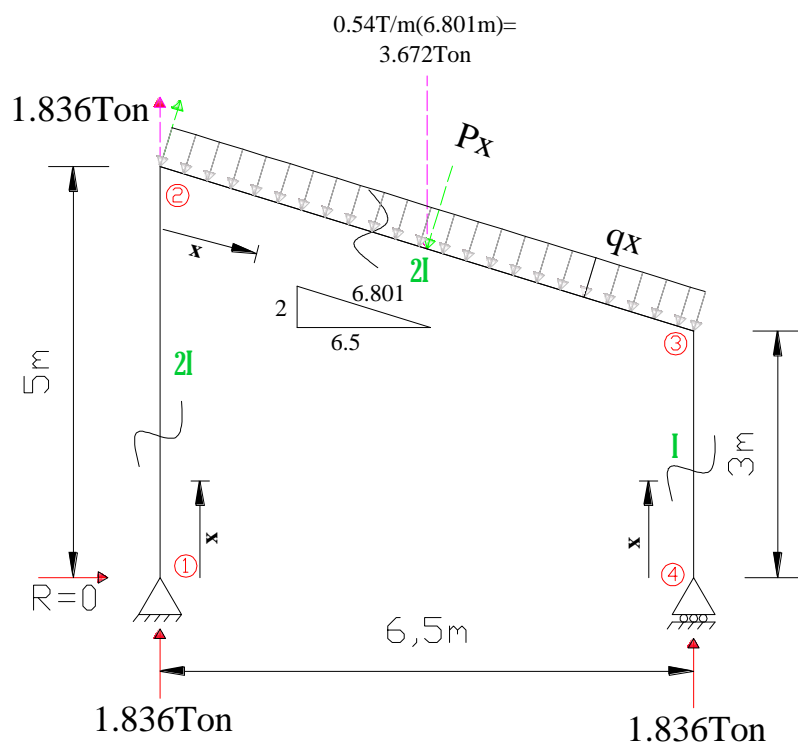
Determinar el desplazamiento vertical en el punto “3” (δ_{v3}) y el desplazamiento horizontal en el punto “3” (δ_{H3}), aplicando el método de Trabajo Virtual, en el siguiente marco.



Propiedades de las barras: El momento de inercia para cada barra esta indicado. Todas las barras comparten el mismo modulo de elasticidad (E).

1. Por carga real:

Obtenemos las reacciones en sus apoyos y ecuación de momentos de cada tramo.



$$\overset{\curvearrowright}{M+} \Sigma M1=0$$

$$-(3.672\text{Ton})(6.5/2\text{m}) + (R_4)(6.5\text{m}) = 0$$

$$R_4=1.836\text{Ton}\uparrow$$

$$+\uparrow \Sigma F_y=0$$

$$1.836\text{Ton}-3.672\text{Ton}+R_1=0$$

$$R_1=1.836\text{Ton}\uparrow$$

$$P_x = (6.5/6.801)(3.672\text{ Ton}) = 3.51\text{Ton}$$

$$q_x = 3.51\text{Ton}/6.801\text{m} = 0.516\text{ Ton/m}$$

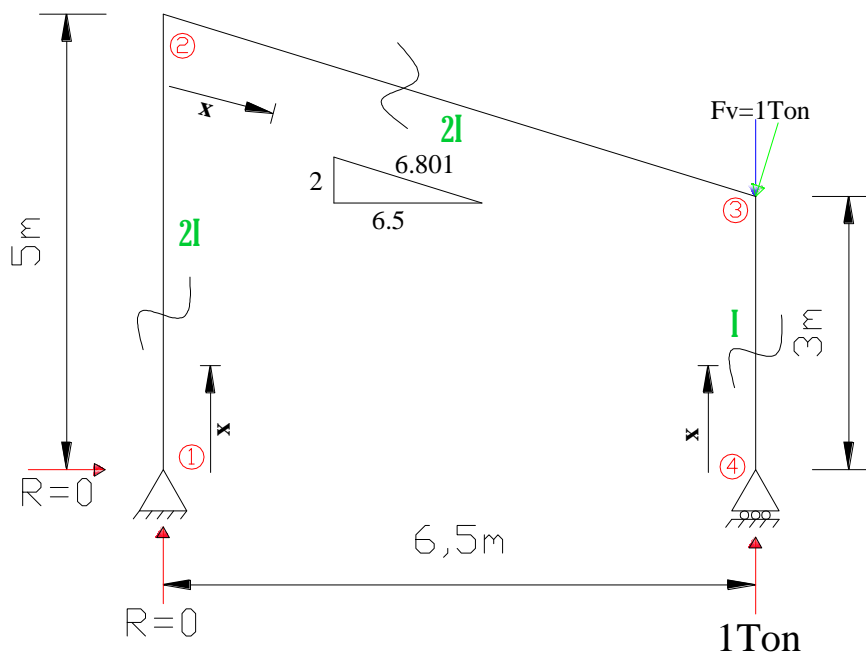
Ecuaciones por tramo:

$$1-3 \quad M_x = 0; 0 \leq X \leq 5$$

$$2-3 \quad M_x = ((-0.516/2)X^2) + 1.836(6.5/6.801)X; 0 \leq X \leq 6.801$$

$$4-3 \quad M_x = 0; 0 \leq X \leq 3$$

2. Por carga virtual Fv:



$$\overset{\curvearrowright}{M+} \Sigma M1=0$$

$$-(1\text{Ton})(6.5\text{m}) + (R_4)(6.5\text{m}) = 0$$

$$R_4=1\text{Ton}\uparrow$$

$$+\uparrow \Sigma F_y=0$$

$$1\text{Ton}-1\text{Ton}+R_1=0$$

$$R_1=0$$

1-3 $m_X = 0; 0 \leq X \leq 5$

$$4-3 \text{ mX} = 0; 0 \leq X \leq 3$$

Diagram of a frame structure with a horizontal reaction force $R=1\text{Ton}$ at support 1, a horizontal force $F_H=1\text{Ton}$ at joint 3, and a triangular load on the inclined member 2I. The diagram shows dimensions: 5m vertical height, 6.5m horizontal distance, and 3m vertical height. It also includes a slope triangle with sides 2, 6.5, and 6.801, and coordinate axes x .

M_+ $\Sigma M1=0$

R₄=0.462Ton↑

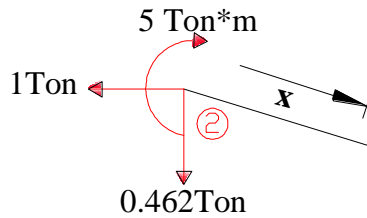
R₁=0.462Ton ↓

R= 1Ton ←

Ecuaciones por tramo:

$$1-3 \text{ mx} = X; 0 \leq X \leq 5$$

$$2-3 \text{ mx} = 5 - 0.294X - 0.441X = 5 - 0.735X; 0 \leq X \leq 6.801$$



$$(6.5/6.801)(0.462 \text{ Ton}) = 0.441 \text{ Ton}$$

$$(2/6.801)(1 \text{ Ton}) = 0.294 \text{ Ton}$$

$$4-3 \text{ mx} = 0; 0 \leq X \leq 3$$

Tramo	Rango "X"	Ec. Mx	Ec. mxv	Ec. mxH	I
1-2	$0 \leq X \leq 5$	0	0	X	2
2-3	$0 \leq X \leq 6.801$	$((-0.516/2)X^2) + 1.755X$	0	$5 - 0.735X$	2
4-3	$0 \leq X \leq 3$	0	0	0	1

4. A continuación, sustituimos las ecuaciones de momento en la expresión de desplazamiento virtual para resolver las integrales.

$$\delta v_3 = \int_0^{6.5} \frac{(0)(0)}{EI} dx + \int_0^{6.801} \frac{\left(-\frac{0.516x^2}{2} + 1.755x\right)(0)}{EI} dx + \int_0^3 \frac{(0)(0)}{EI} dx = 0$$

$$\begin{aligned} \delta H_3 &= \int_0^{6.5} \frac{(0)(X)}{EI} dx + \int_0^{6.801} \frac{\left(-\frac{0.516x^2}{2} + 1.755x\right)(5 - 0.735x)}{EI} dx + \int_0^3 \frac{(0)(0)}{EI} dx \\ &= + \frac{16.919}{EI} \end{aligned}$$

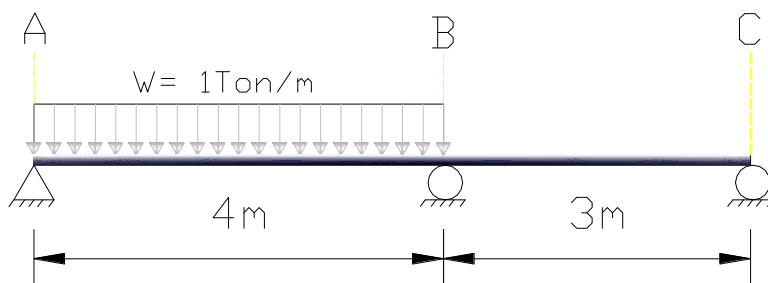
***Nota:**

El signo positivo indica, que la dirección en que propusimos el desplazamiento es correcta.

MÉTODO DE LAS FLEXIBILIDADES (FUERZAS).

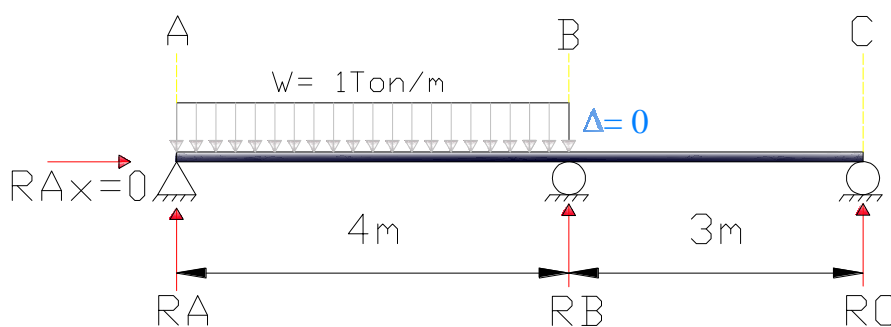
EJECICIO 1

Determinar las reacciones redundantes para la siguiente viga hiperestática.



Propiedades de la viga EI son constantes.

- Identificación de reacciones redundantes:

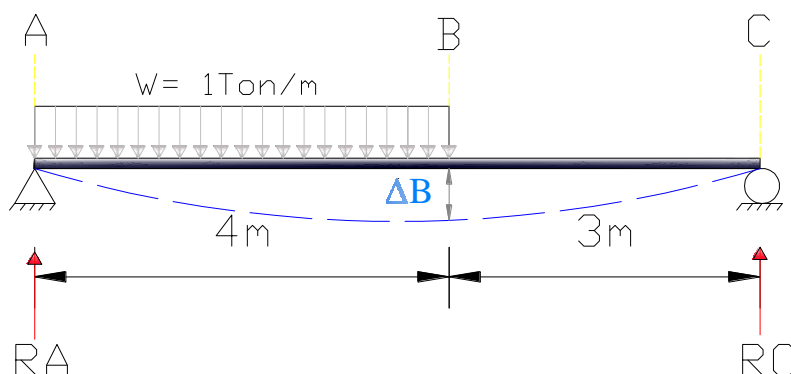


R. Redundantes = No. De reacciones – Ecs. De la estática.

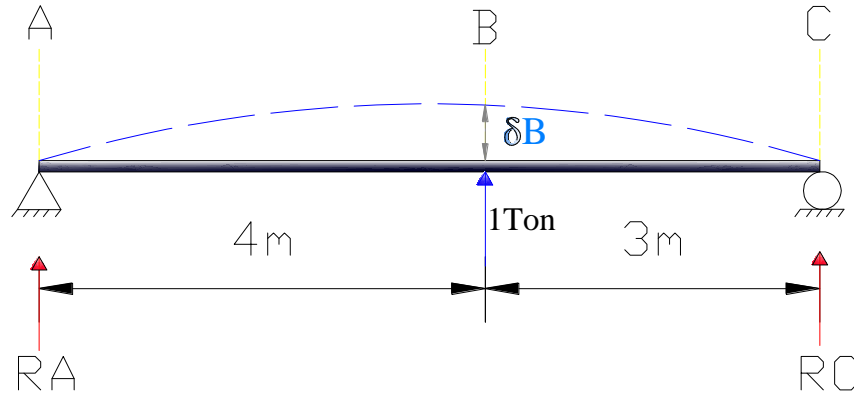
R. Redundantes = $4 - 3 = 1$.

Nótese que los desplazamientos en los apoyos son igual a cero.

- Sabiendo que existe una reacción redundante elegimos una de las reacciones de la viga y la proponemos como redundante, en este caso la reacción del apoyo "B". Ahora la viga puede resolverse estáticamente, sin embargo se presentará una deformación de la viga al quitar el apoyo "B".



Ahora, en la misma viga pero sin las condiciones de carga real, colocamos una fuerza virtual unitaria que sustituya al apoyo "B", la cual producirá otra deformación en la viga y un nuevo desplazamiento.



- Condición de desplazamiento para el apoyo debe ser igual acero, con la superposición del efecto de deformación por carga real, contrarrestado por la deformación por una reacción en "B":

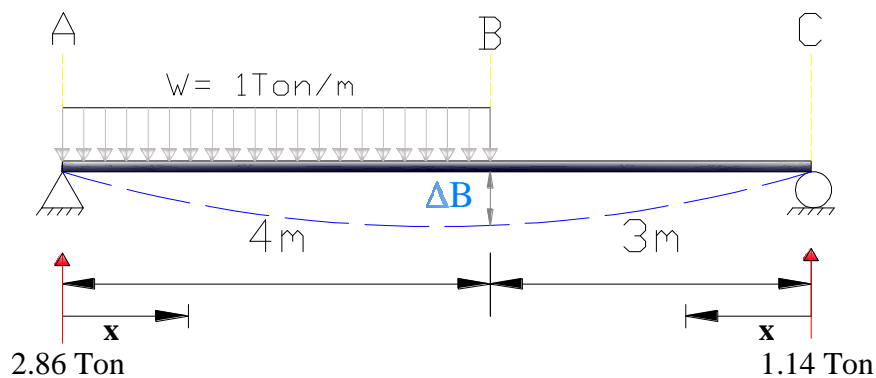
$$\Delta B + R_B \delta B = 0$$

Donde:

$$\Delta B = \int_0^L \frac{M x m x}{EI} dx$$

$$\delta B = \int_0^L \frac{m x m x}{EI} dx$$

- Obtenemos las reacciones en los apoyos para cada viga y sus correspondientes diagramas y ecuaciones de momento.



$$\sum M_A = 0$$

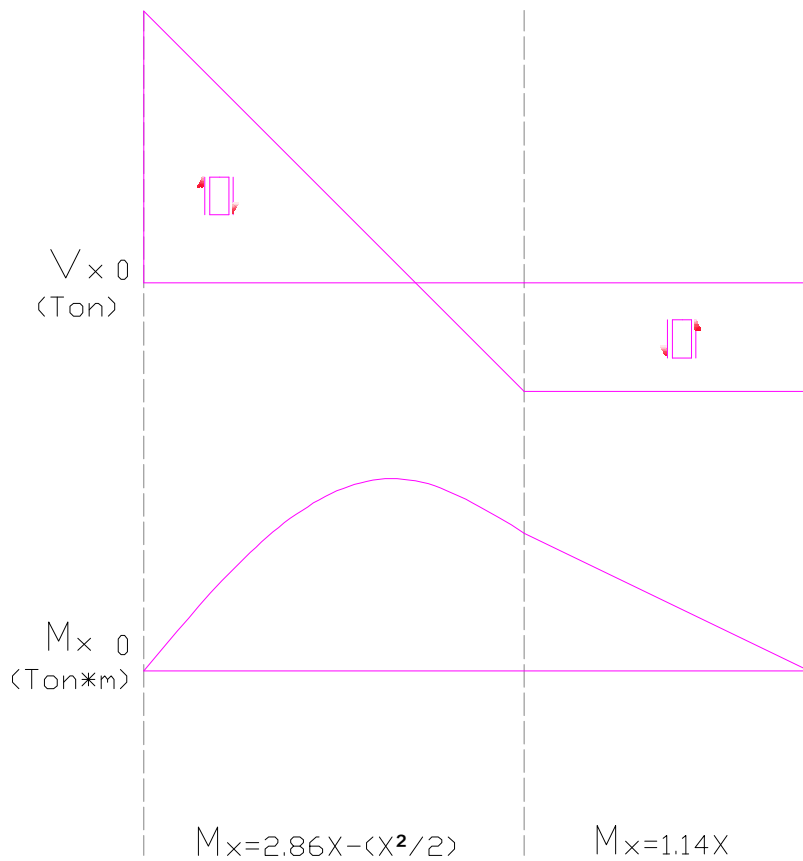
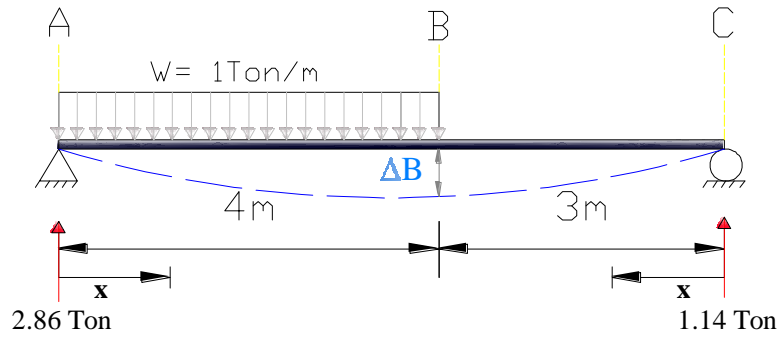
$$-(1 \text{ Ton/m})(4 \text{ m})(2 \text{ m}) + (R_c)(7 \text{ m}) = 0$$

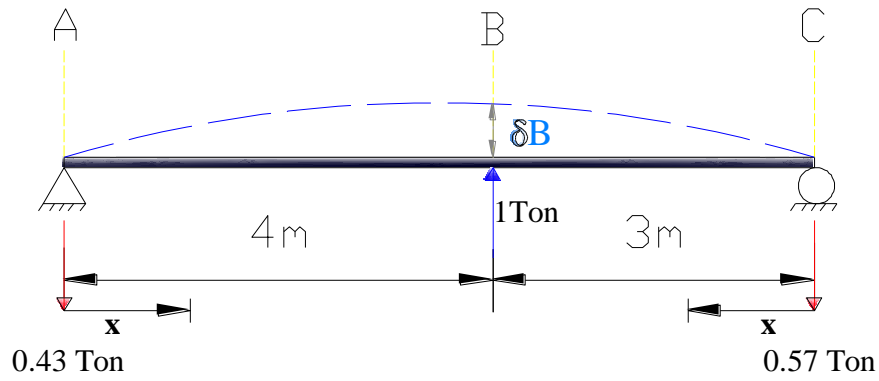
$$R_c = 1.14 \text{ Ton} \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-4 \text{ Ton} + 1.14 \text{ Ton} + R_A = 0$$

$$R_A = 2.86 \text{ Ton} \uparrow$$





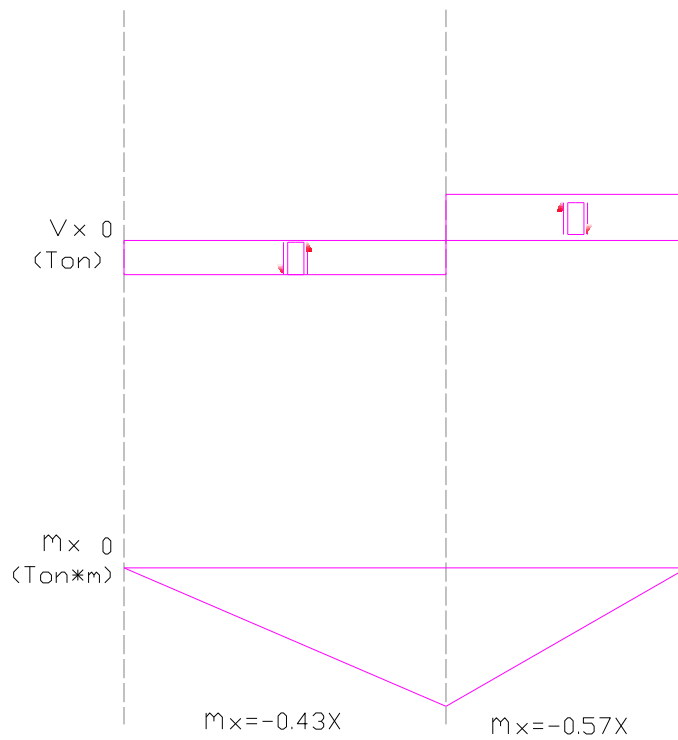
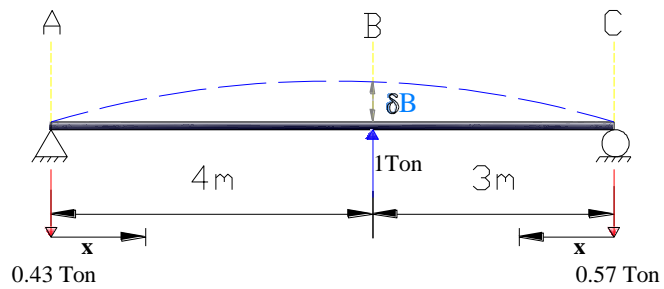
$$\sum M_A = 0$$

$$(1\text{Ton})(4\text{m}) - (R_c)(7\text{m}) = 0 \quad \mathbf{R_c = 0.57\text{ Ton}\downarrow}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-0.57\text{ Ton} + 1\text{Ton} + R_A = 0$$

$$\mathbf{R_A = 0.43\text{ Ton}\downarrow}$$



5. Cálculo de los desplazamientos:

$$\Delta B = \int_0^4 \frac{(2.86X - (X^2/2))(-0.43X)}{EI} dx + \int_0^3 \frac{(1.14X)(-0.57X)}{EI} dx$$

$$EI\Delta B = \left(-\frac{1.23X^3}{3} + \frac{0.43X^4}{(2)(4)} \right) \Big|_0^4 - \frac{0.65X^3}{3} \Big|_0^3 = \left(-\frac{1.23(4)^3}{3} + \frac{0.43(4)^4}{(2)(4)} - \frac{0.65(3)^3}{3} \right) = -18.33$$

$$\delta B = \int_0^4 \frac{(-0.43X)(-0.43X)}{EI} dx + \int_0^3 \frac{(-0.57X)(-0.57X)}{EI} dx$$

$$EI\delta B = \left(\frac{0.185X^3}{3} \right) \Big|_0^4 + \left(\frac{0.325X^3}{3} \right) \Big|_0^3 = \left(\frac{0.185(4)^3}{3} + \frac{0.325(3)^3}{3} \right) = 6.87$$

6. De la condición de desplazamiento tenemos:

$$\Delta B + R_B \delta B = 0$$

$$R_B = -\Delta B / \delta B$$

$$R_B = -(-18.33) / 6.87 = 2.67 \text{ Ton} \uparrow$$

7. Cálculo de las reacciones en los apoyos A y C:

$$\sum M_A = 0$$

$$-(1 \text{ Ton/m})(4 \text{ m})(2 \text{ m}) + 2.67 \text{ Ton}(4 \text{ m}) + (R_C)(7 \text{ m}) = 0$$

$$R_C = 0.38 \text{ Ton} \downarrow$$

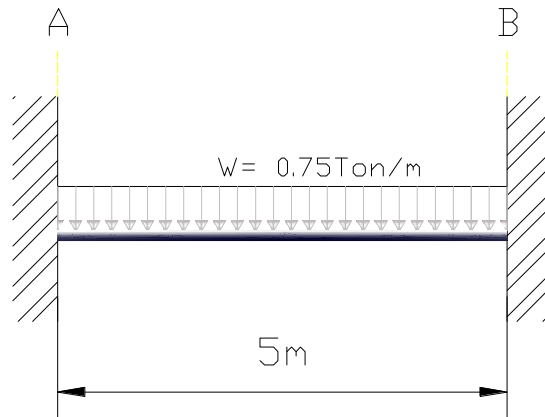
$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-4 \text{ Ton} - 0.38 \text{ Ton} + 2.67 \text{ Ton} + R_A = 0$$

$$R_A = 1.71 \text{ Ton} \downarrow$$

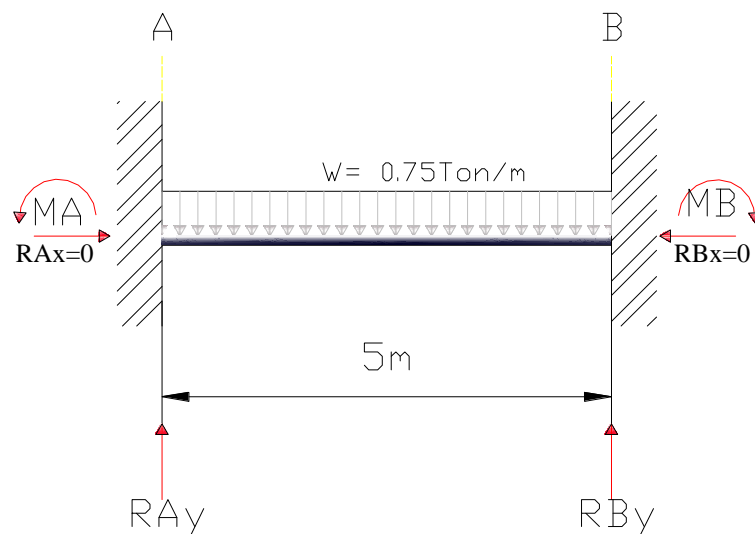
MÉTODO DE LAS FLEXIBILIDADES (FUERZAS).**EJECICIO 2**

Aplique el método de las fuerzas para determinar las reacciones redundantes para la siguiente viga hiperestática.



Propiedades de la viga EI son constantes.

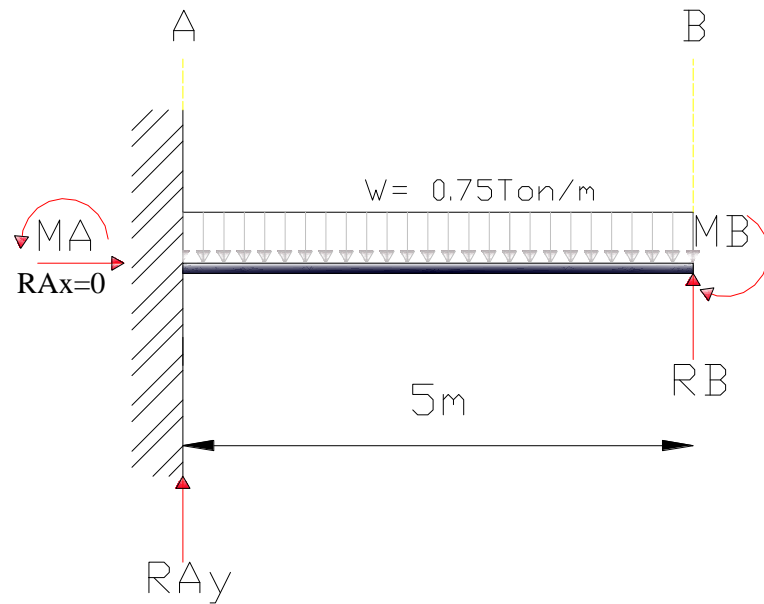
1. Identificación de reacciones redundantes:



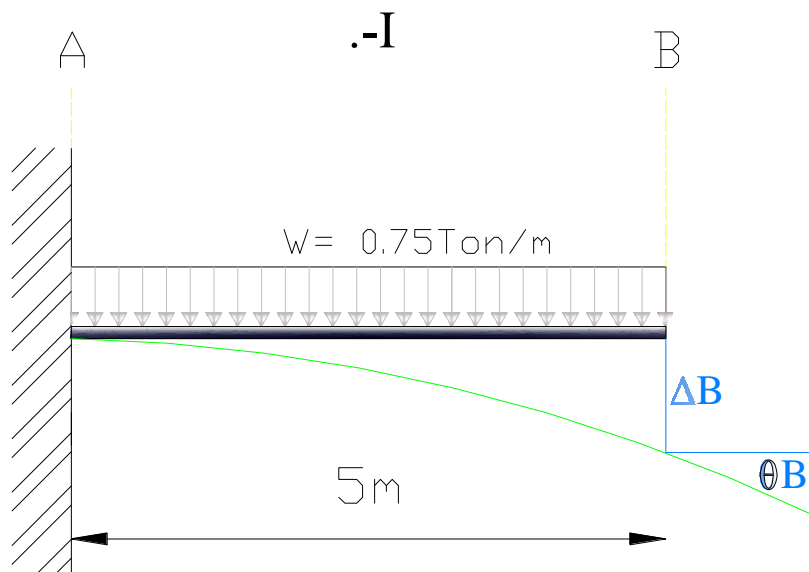
R. Redundantes = No. De reacciones – Ecs. De la estática.

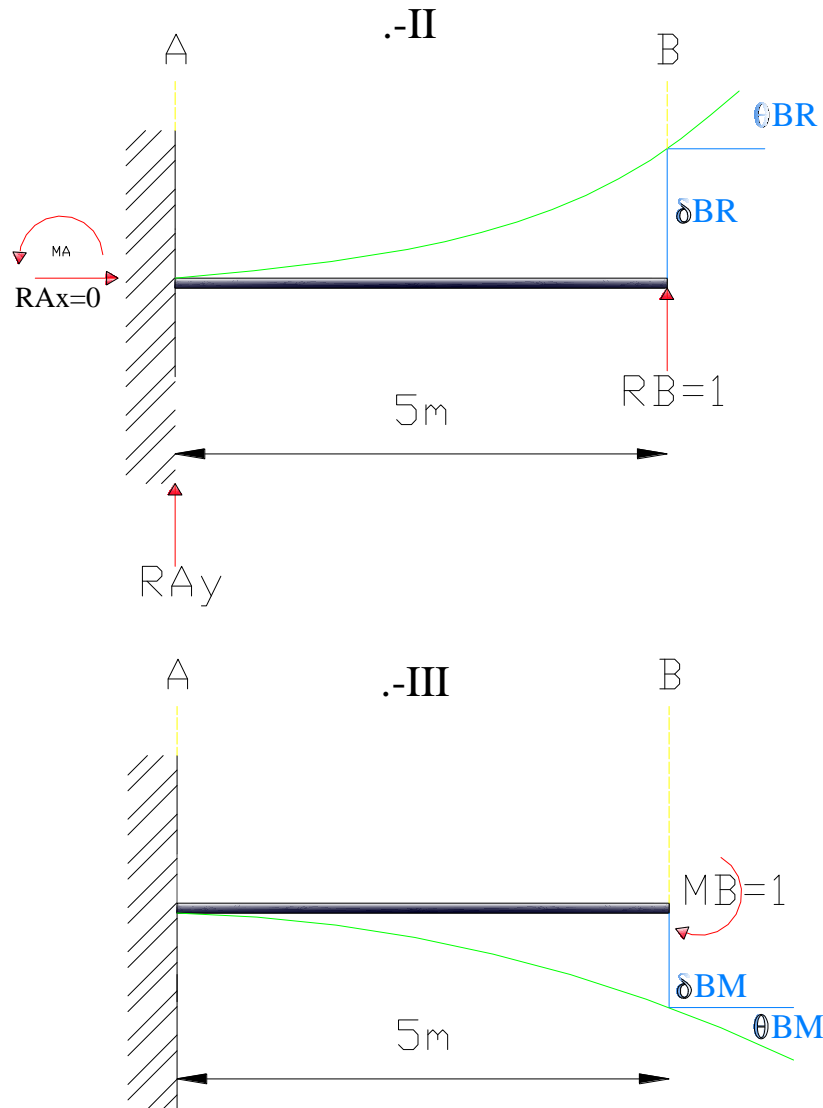
R. Redundantes = $4 - 2 = 2$.

2. Consideramos R_B y M_B como reacciones redundantes.



Ahora, la viga liberada del extremo "B" producirá una deformación en la viga. Para la misma viga pero sin las condiciones de carga real, colocamos una fuerza virtual unitaria que sustituya al apoyo "B" para cada reacción redundante, la cual producirá otra deformación en la viga y un nuevo desplazamiento y una rotación en función de las reacciones.





3. Condición de desplazamiento para el apoyo debe ser igual a cero, con la superposición del efecto de deformación por carga real, contrarrestado por la deformación por una reacción y momento en "B":

$$\Delta B + \delta_{BR} \cdot R_B + \delta_{BM} \cdot M_B = 0$$

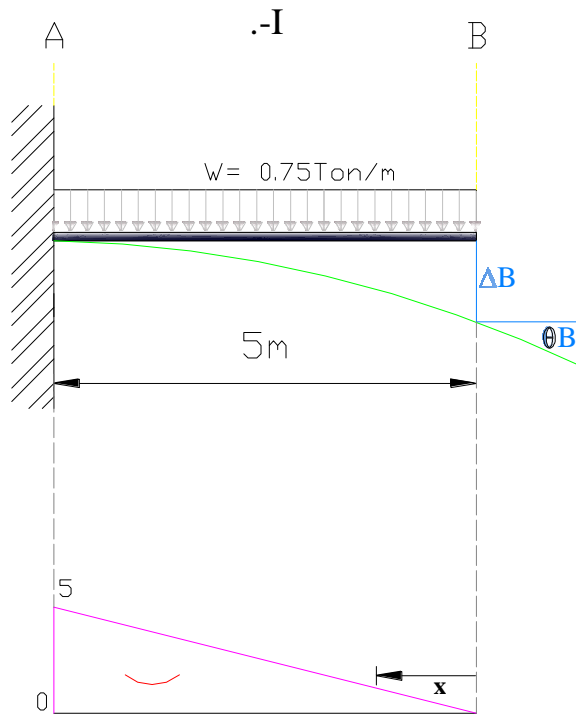
$$\theta_B + \theta_{BR} \cdot R_B + \theta_{BM} \cdot M_B = 0$$

Donde:

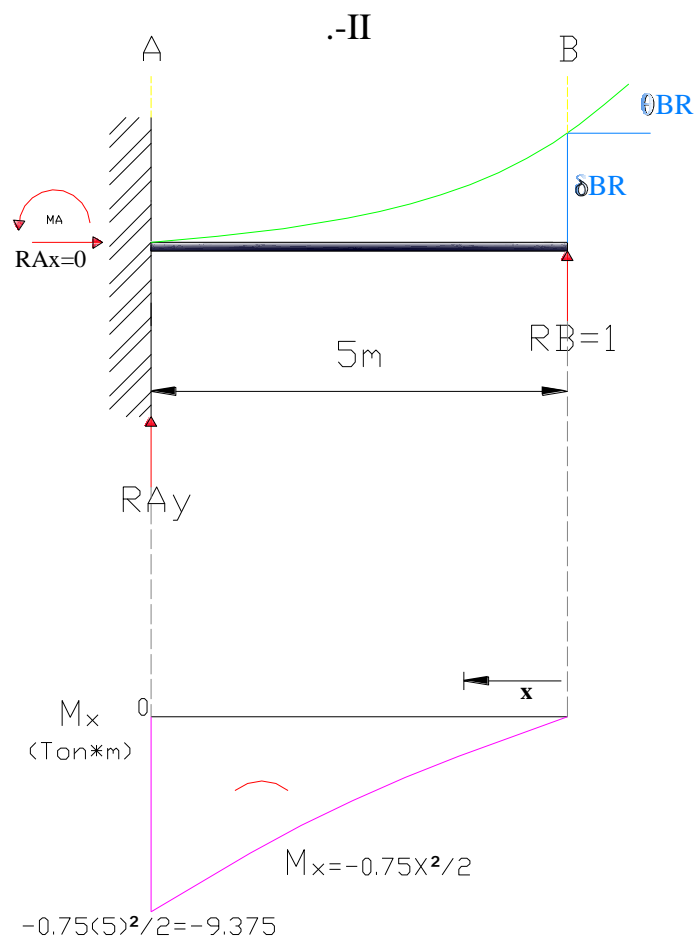
$$\Delta B = \int_0^L \frac{Mxmx}{EI} dx \quad \delta_{BR} = \int_0^L \frac{mxmx}{EI} dx \quad \delta_{BM} = \int_0^L \frac{mxmx}{EI} dx$$

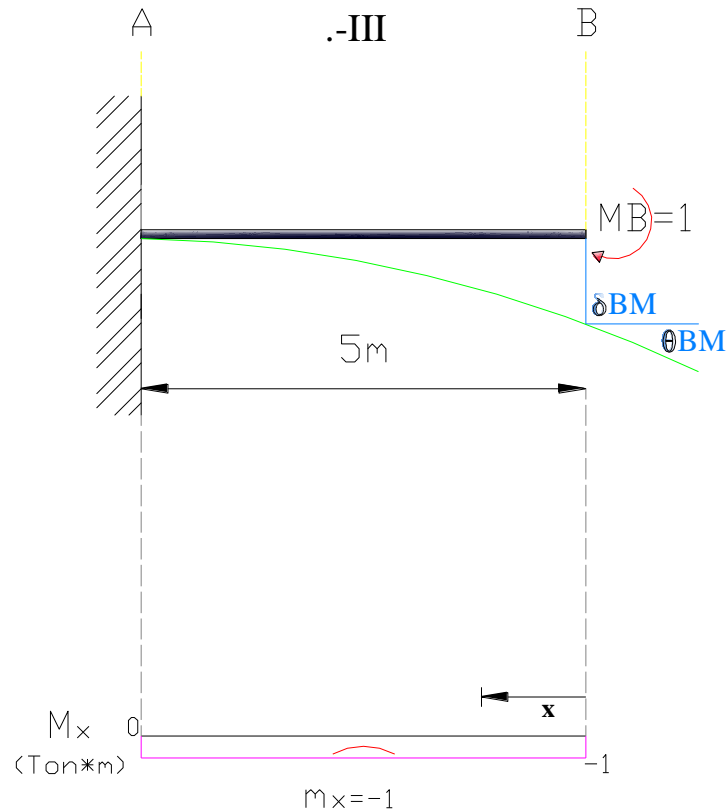
$$\theta_B = \int_0^L \frac{Mxmx}{EI} dx \quad \theta_{BR} = \int_0^L \frac{mxmx}{EI} dx \quad \theta_{BM} = \int_0^L \frac{mxmx}{EI} dx$$

4. Obtenemos para cada viga sus correspondientes diagramas y ecuaciones de momento.



$$m_x = x$$





Tramo	Rango "X"	Ec. M_x	Ec. m_{xv}	Ec. m_{xH}
A-B	$0 \leq X \leq 5$	$-0.75X^2/2$	X	-1

5. Cálculo de los desplazamientos:

$$\Delta_B = \int_0^5 \frac{(-0.75X^2/2)(X)}{EI} dx = \int_0^5 \frac{(-0.75X^3/2)}{EI} dx$$

$$EI\Delta_B = \left(-\frac{0.75X^4}{8} \right) \Big|_0^5 = \left(-\frac{0.75(5)^4}{8} \right) = -58.59$$

$$\theta_B = \int_0^5 \frac{(-0.75X^2/2)(-1)}{EI} dx = \int_0^5 \frac{(0.75X^2/2)}{EI} dx$$

$$EI\theta_B = \left(\frac{0.75X^3}{6} \right) \Big|_0^5 = \left(\frac{0.75(5)^3}{6} \right) = 15.63$$

$$\delta_{BR} = \int_0^5 \frac{(X)(X)}{EI} dx = \int_0^5 \frac{(X^2)}{EI} dx$$

$$EI\delta_{BR} = \left(\frac{X^3}{3} \right) \Big|_0^5 = \left(\frac{(5)^3}{3} \right) = 41.67$$

$$\theta_{BM} = \int_0^5 \frac{(-1)(-1)}{EI} dx = \int_0^5 \frac{1}{EI} dx$$

$$EI\theta_{BM} = (X) \Big|_0^5 = ((5)) = 5$$

$$\delta_{BM} = \int_0^5 \frac{(-1)(X)}{EI} dx = \int_0^5 \frac{(-X)}{EI} dx$$

$$EI\delta_{BM} = \left(-\frac{X^2}{2} \right) \Big|_0^5 = \left(-\frac{(5)^2}{2} \right) = -12.5$$

$$\theta_{BR} = \int_0^5 \frac{(X)(-1)}{EI} dx = \int_0^5 \frac{(-X)}{EI} dx$$

$$EI\theta_{BR} = \left(-\frac{X^2}{2} \right) \Big|_0^5 = \left(-\frac{(5)^2}{2} \right) = -12.5$$

6. De la condición de desplazamiento tenemos:

$$(-58.59 + 41.67 * R_B - 12.5 * M_B) \frac{1}{EI} = 0$$

$$(15.63 - 12.5 * R_B + 5 * M_B) \frac{1}{EI} = 0$$

7. Representado de forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \frac{-58.59}{EI} \\ \frac{15.63}{EI} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{41.67}{EI} & \frac{-12.5}{EI} \\ \frac{-12.5}{EI} & \frac{5}{EI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_B \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Despejando la matriz de términos independientes para obtener RB y MB :

$$\begin{bmatrix} \frac{41.67}{EI} & -\frac{12.5}{EI} \\ -\frac{12.5}{EI} & \frac{5}{EI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} RB \\ MB \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{58.59}{EI} \\ -\frac{15.63}{EI} \end{Bmatrix}$$

Al despejar la matriz de desplazamientos, se utiliza la matriz inversa de esta:

$$\begin{Bmatrix} RB \\ MB \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.095 & 0.239 \\ 0.239 & 0.799 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{58.59}{EI} \\ -\frac{15.63}{EI} \end{Bmatrix}$$

*A esta matriz le llamaremos matriz de rigideces.

$$\text{Asi} \quad \{R\} = [Fij]^{-1}\{\Delta\}$$

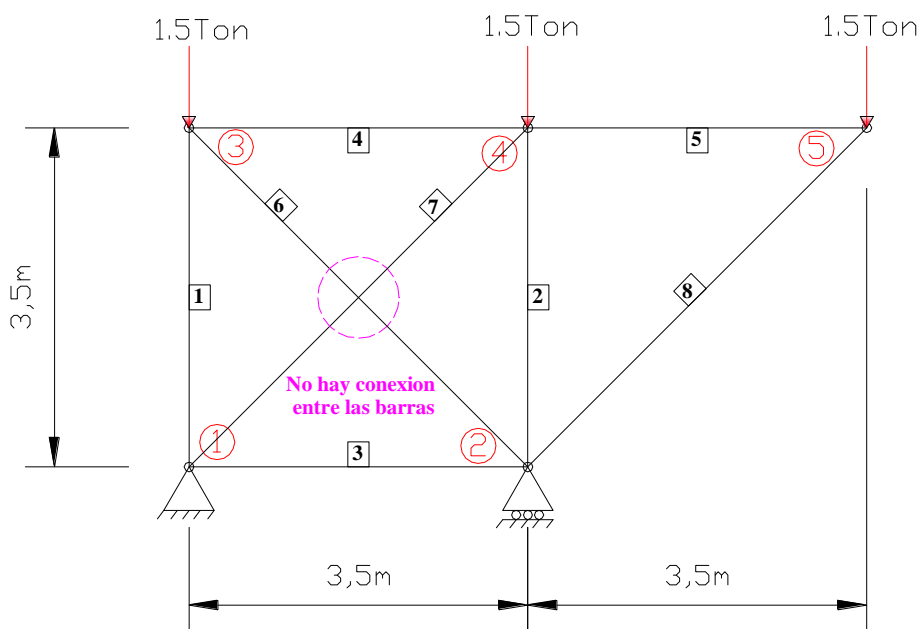
$$\{R\} = [K]\{\Delta\}$$

RB =1.872Ton

MB=1.556Ton*m

MÉTODO DE LAS FLEXIBILIDADES (FUERZAS).**EJECICIO 3**

Aplique el método de las fuerzas para resolver la siguiente armadura (determine las fuerzas en cada barra).



Propiedades de la viga EA son constantes para todas las barras.

1. Identificación de reacciones redundantes y grado de hiperestaticidad:

$$m = 2j - r$$

$$8 \neq 2(5) - 3 = 7$$

Donde:

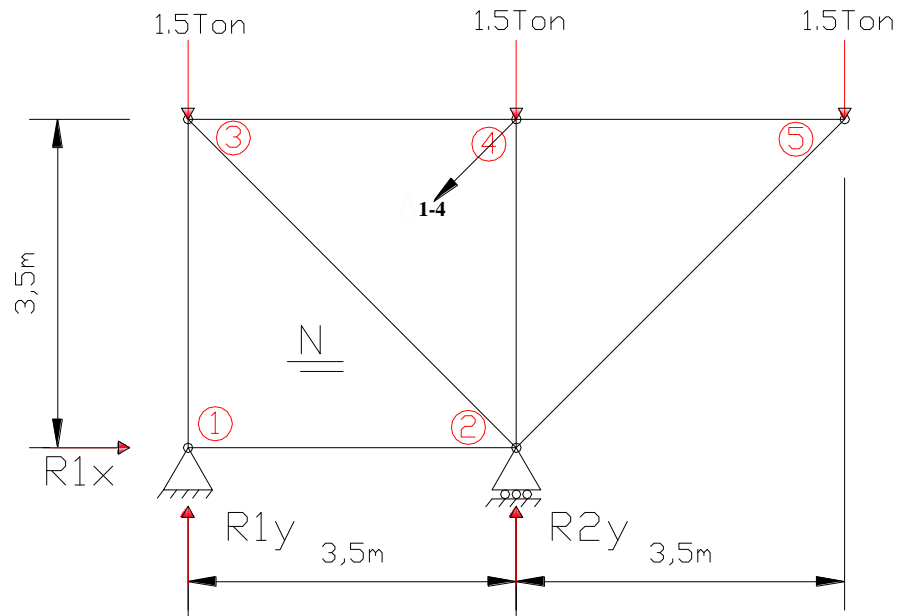
m= numero de elementos.

j= numero de nodos.

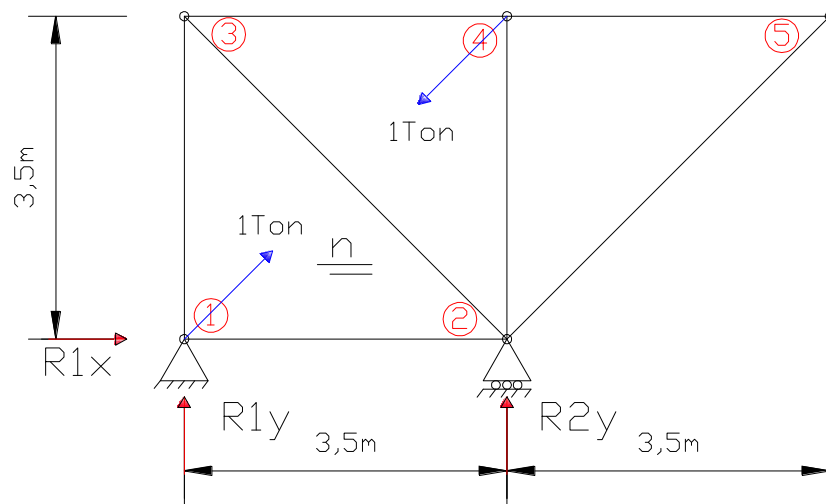
r= reacciones.

\therefore es una armadura hiperestática grado 1, de carácter “interno”.

2. Consideramos que el elemento 7 como redundante, así tenemos una nueva armadura sin la intervención de ese elemento, solo se considerara un desplazamiento en la dirección que estaba colocada la barra.



Ahora colocamos la misma armadura, sin las condiciones de carga real y con una fuerza unitaria saliendo en la direcci3n que propusimos el desplazamiento Δ_{1-4} .



3. Condición de desplazamiento para nodo 4 (Δ_{14}) debe ser igual a cero, con la superposición del efecto de deformación por carga real, contrarrestado por el desplazamiento virtual δ_{14} , por una fuerza F_{14} :

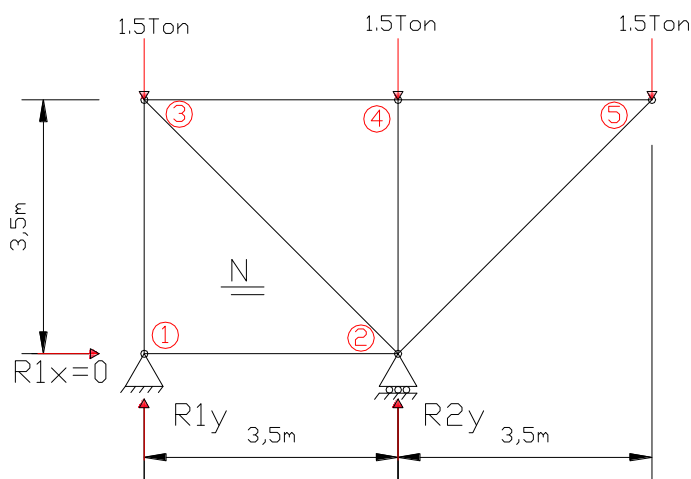
$$\Delta_{14} + \delta_{14}F_{14} = 0$$

Donde:

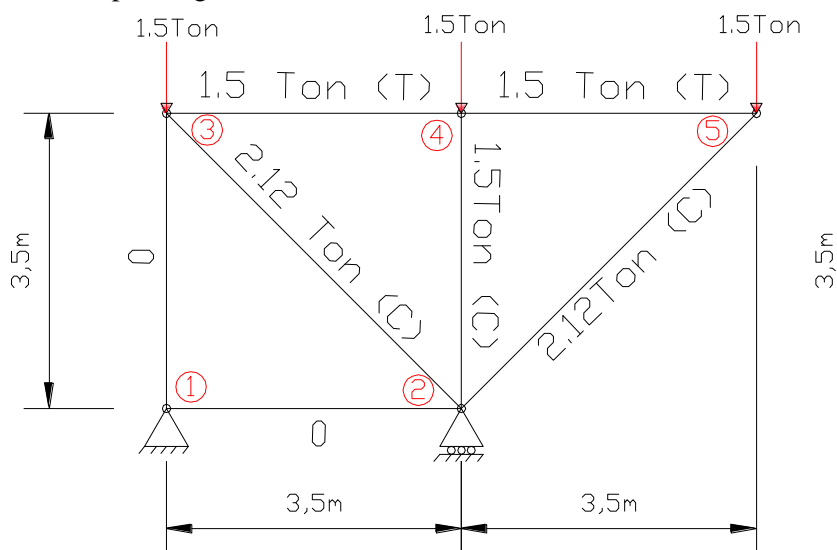
$$\Delta_{14} = \sum \frac{NnL}{EA}$$

$$\delta_{14} = \sum \frac{nnL}{EA}$$

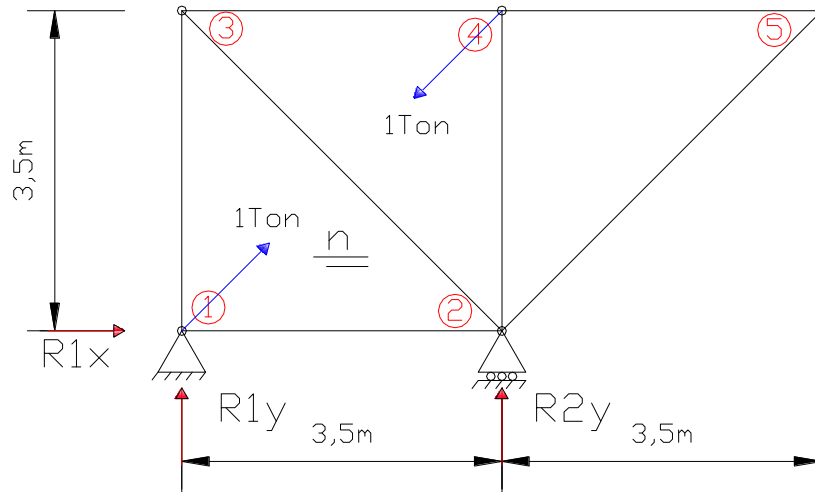
4. Analizamos cada nodo para condición por carga real y carga virtual.
Por carga real tenemos



***Nota:** al quitar el elemento 7, la armadura quedó igual que un ejercicio previamente realizado en el método de trabajo virtual por lo que ya contamos con los datos y comportamiento por carga real.

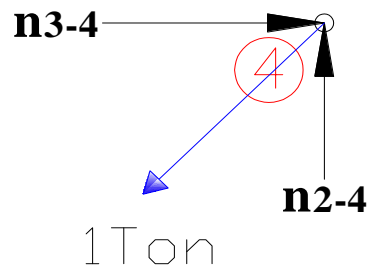


Por carga virtual:



Para las barras 2-5 y 4-5 la fuerza interna “n” es igual a cero, pues las fuerzas virtuales se descomponen y contrarrestan en la parte simétrica de la armadura.

Nodo 4.



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$-1(1/1.41) \text{ Ton} + n_{2-4} = 0$$

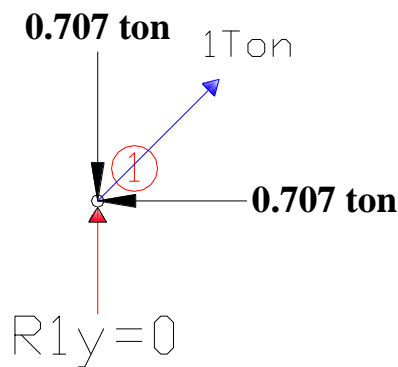
$$n_{2-4} = 0.707 \text{ Ton (C)}$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

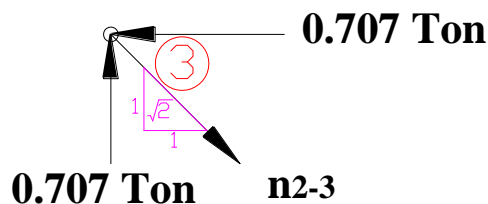
$$n_{3-4} - 1(1/1.41) \text{ Ton} = 0$$

$$n_{3-4} = 0.707 \text{ Ton (C)}$$

Nodo 1.



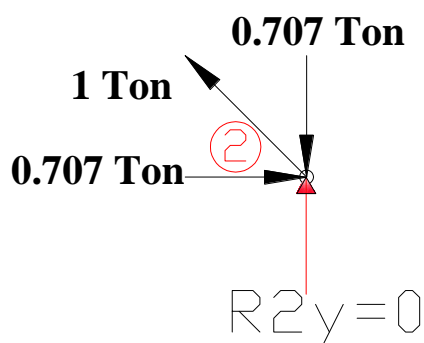
Nodo 3.



$$+ \rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$n_{2-3} (1/1.41) - 0.707 \text{ Ton} = 0 \quad n_{3-4} = 1 \text{ Ton (T)}$$

Nodo 2.



5. Obtenemos nuestros desplazamientos y fuerzas internas en base a
 $F = N + nF_{1-4}$

Barra	Longitud(m)	N(Ton)	n(Ton)	$\Delta = (N \cdot n \cdot L) / EA$	$\delta = (n \cdot n \cdot L) / EA$
1-2	3,5	0	- 0,707	0	1,7494715
1-3	3,5	0	- 0,707	0	1,7494715
2-3	4,95	- 2,12	+ 1	-10,494	4,95
2-4	3,5	- 1,5	- 0,707	3,71175	1,7494715
2-5	4,95	- 2,12	0	0	0
3-4	3,5	+ 1,5	- 0,707	-3,71175	1,7494715
4-5	3,5	+ 1,5	0	0	0
1-4	4,95	+ -----	+ 1	-----	4,95
$\Sigma =$				-10,49 /EA	16,90 /EA

6. De la condición de desplazamiento tenemos:

$$\Delta_{14} + \delta_{14} F_{14} = 0$$

$$(-10.49/EA) + (16.90/EA) F_{14} = 0$$

$$(16.90/EA) F_{14} = 10.49/EA$$

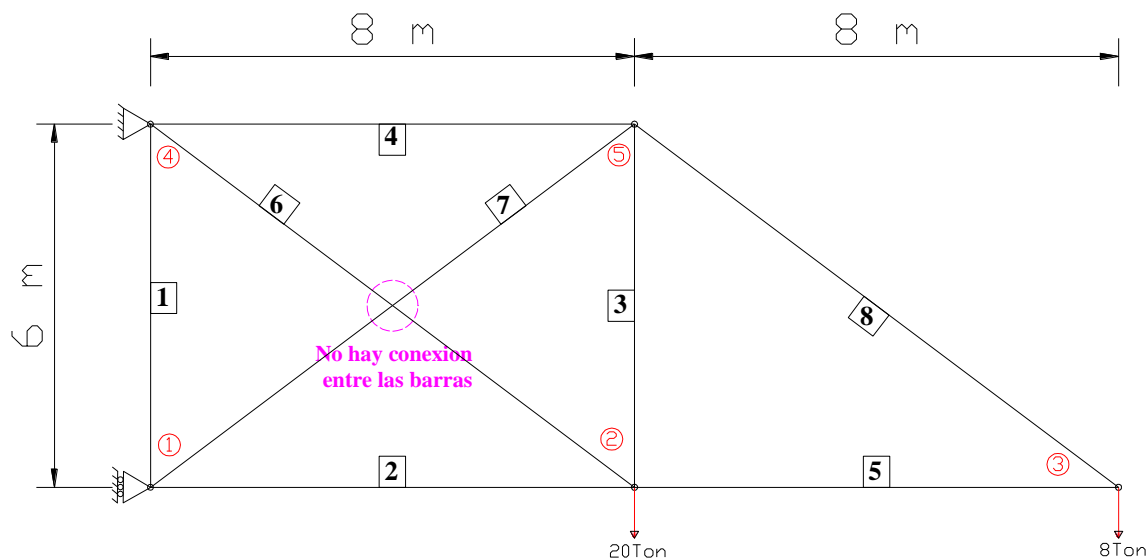
$$F_{14} = 0.61 \text{ Ton}$$

7. Fuerzas internas en las demás barras:

Barra	Longitud(m)	N(Ton)		n(Ton)		$\Delta=(N*n*L)/EA$	$\delta=(n*n*L)/EA$	$F1=N1+(n1*F1-4)$
1-2	3,5	0		-	0,707	0	1,7494715	-0,44
1-3	3,5	0		-	0,707	0	1,7494715	-0,44
2-3	4,95	-	2,12	+	1	-10,494	4,95	-1,50
2-4	3,5	-	1,5	-	0,707	3,71175	1,7494715	-1,94
2-5	4,95	-	2,12		0	0	0	-2,12
3-4	3,5	+	1,5	-	0,707	-3,71175	1,7494715	1,06
4-5	3,5	+	1,5		0	0	0	1,5
1-4	4,95	+	-----	+	1	-----	4,95	0,62
$\Sigma=$						-10,49 /EA	16,90 /EA	

MÉTODO DE LAS FLEXIBILIDADES (FUERZAS).**EJECICIO 4**

Aplique el método de las fuerzas para resolver la siguiente armadura (determine las fuerzas en cada barra).



Propiedades de la viga EA son constantes para todas las barras.

1. Identificación de reacciones redundantes y grado de hiperestaticidad:

$$m = 2j - r$$

$$8 \neq 2(5) - 3 = 7$$

Donde:

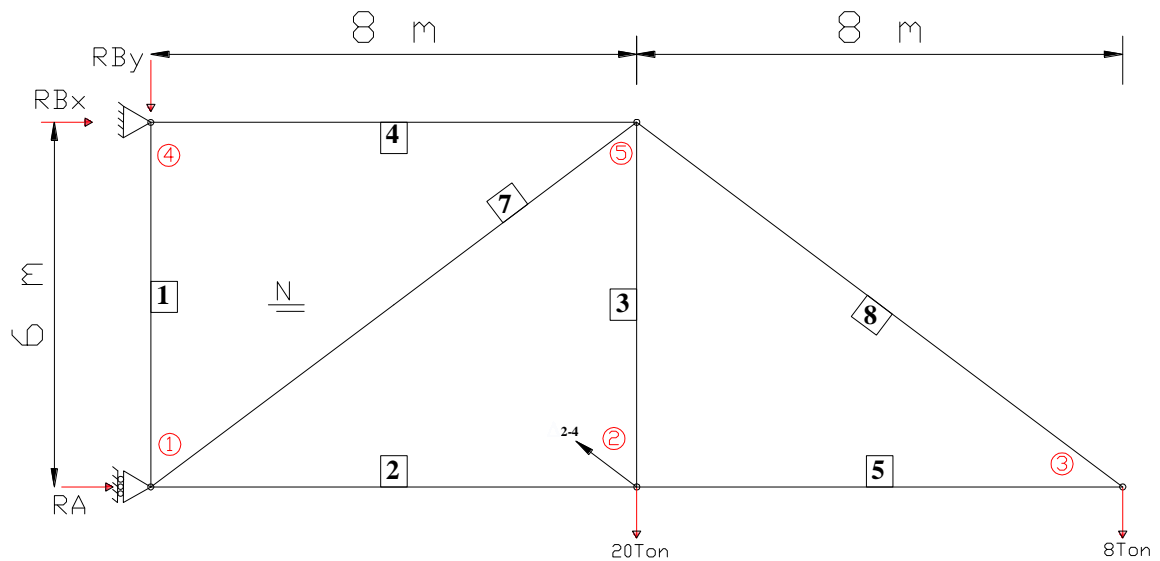
m= numero de elementos.

j= numero de nodos.

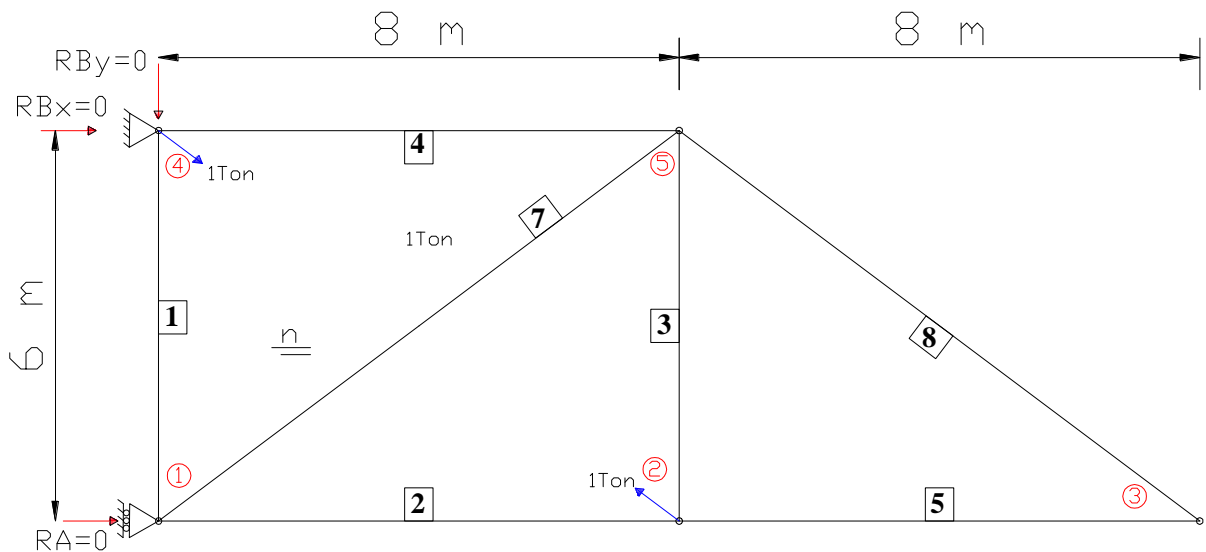
r= reacciones.

\therefore es una armadura hiperestática grado 1, de carácter “interno”.

2. Consideramos que el elemento 6 como redundante, así tenemos una nueva armadura sin la intervención de ese elemento, solo se considerara un desplazamiento en la dirección que estaba colocada la barra.



Ahora colocamos la misma armadura, sin las condiciones de carga real y con una fuerza unitaria saliendo en la dirección que propusimos el desplazamiento Δ_{2-4} .



3. Condición de desplazamiento para nodo 2 (Δ_{24}) debe ser igual a cero, con la superposición del efecto de deformación por carga real, contrarrestado por el desplazamiento virtual δ_{24} , por una fuerza F_{24} :

$$\Delta_{24} + \delta_{24}F_{24} = 0$$

Donde:

$$\Delta_{24} = \sum \frac{NnL}{EA}$$

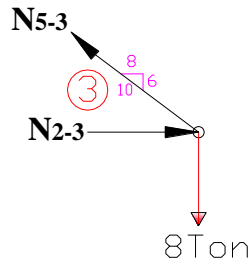
$$\delta_{24} = \sum \frac{nnL}{EA}$$

4. Analizamos cada nodo para condición por carga real y carga virtual.

Por carga real tenemos:

Para N:

Nodo 3.



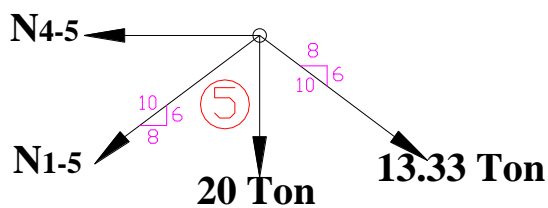
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$-8 \text{ Ton} - N_{5-3}(6/10) = 0 \quad N_{5-3} = 13.33 \text{ Ton (T)}$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$N_{2-3} - 13.33 \text{ Ton} (8/10) = 0 \quad N_{2-3} = 10.67 \text{ Ton (C)}$$

Nodo 5.



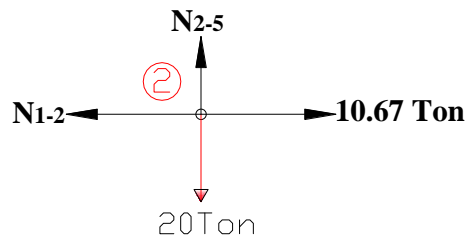
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$-20 \text{ Ton} + N_{1-5} (6/10) - 13.33 \text{ Ton} (6/10) = 0 \quad N_{1-5} = 46.66 \text{ Ton (C)}$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$-N_{4-5} + 13.33 \text{ Ton} (8/10) + 46.66 \text{ Ton} (8/10) = 0 \quad N_{4-5} = 48 \text{ Ton (T)}$$

Nodo 2.



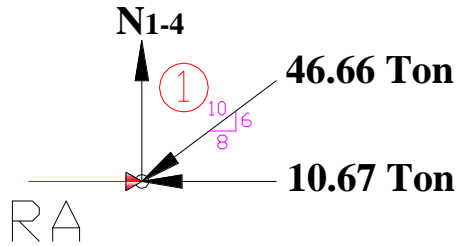
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$N_{2-5} - 20 \text{ Ton} = 0 \quad N_{2-5} = 20 \text{ Ton (T)}$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$N_{1-2} - 10.67 \text{ Ton} = 0 \quad N_{1-2} = 10.67 \text{ Ton (C)}$$

Nodo 1.



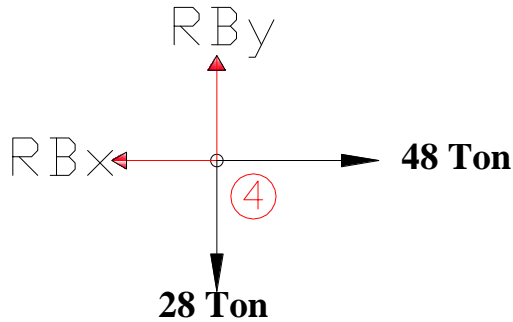
$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$- 46.66 \text{ Ton} (6/10) + N_{1-4} = 0 \quad N_{1-4} = 28 \text{ Ton (T)}$$

$$+ \rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$10.67 \text{ Ton} + R_A = 0 \quad R_A = 36.06 \text{ Ton} \rightarrow$$

Nodo 4.



$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$- 28 \text{ Ton} + R_{By} = 0 \quad R_{By} = 28 \text{ Ton} \uparrow$$

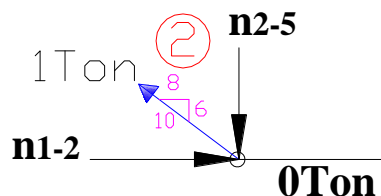
$$+ \rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$- R_{Bx} + 48 \text{ Ton} = 0 \quad R_{Bx} = 48 \text{ Ton} \leftarrow$$

Por carga virtual:

Para las barras 2-3 y 3-5 la fuerza interna “n” es igual a cero, pues las fuerzas virtuales se descomponen y contrarrestan en la parte simétrica de la armadura.

Nodo 2.



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$1(6/10) \text{ Ton} - n_{2-5} = 0 \quad n_{2-5} = 0.6 \text{ Ton (C)} \dots\dots = n_{1-4}$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$n_{1-2} - 1(10/8) \text{ Ton} = 0 \quad n_{1-2} = 0.8 \text{ Ton (C)} \dots\dots = n_{4-5}$$

5. Obtenemos nuestros desplazamientos y fuerzas internas en base a

$$F = N + nF_{2-4}$$

Barra	Longitud(m)	N(Ton)	n(Ton)	$\Delta = (N \cdot n \cdot L) / EA$	$\delta = (n \cdot n \cdot L) / EA$
1-2	8	- 10,67	- 0,8	68,288	5,12
1-4	6	+ 28	- 0,6	-100,8	2,16
1-5	10	- 46,66	+ 1	-466,6	10
2-5	6	+ 20	- 0,6	-72	2,16
2-3	8	- 10,67	0	0	0
4-5	8	+ 48	- 0,8	-307,2	5,12
5-3	10	+ 13,33	0	0	0
4-2	10	+ -----	+ 1	-----	10
$\Sigma =$				-878,31 /EA	34,56 /EA

6. De la condición de desplazamiento tenemos:

$$\Delta_{24} + \delta_{24} F_{24} = 0$$

$$(-878.31/EA) + (34.56/EA) F_{24} = 0$$

$$(34.56/EA) F_{24} = 878.31/EA$$

$$F_{24} = 25.41 \text{ Ton}$$

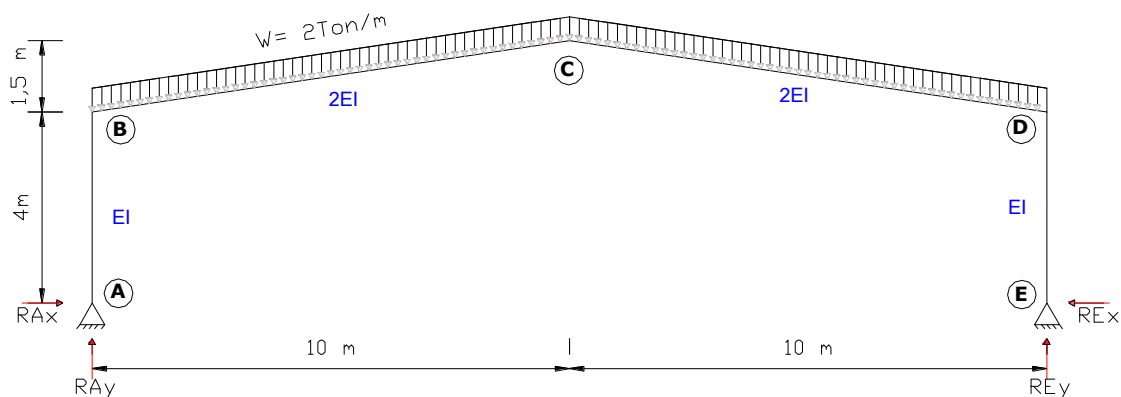
7. Fuerzas internas en las demás barras:

Barra	Longitud(m)	N(Ton)	n(Ton)	$\Delta=(N*n*L)/EA$	$\delta=(n*n*L)/EA$	$F1=N1+(n1*F1-4)$
1-2	8	- 10,67	- 0,8	68,288	5,12	31,00
1-4	6	+ 28	- 0,6	-100,8	2,16	12,75
1-5	10	- 46,66	+ 1	-466,6	10	-21,25
2-5	6	+ 20	- 0,6	-72	2,16	4,75
2-3	8	- 10,67	0	0	0	-10,67
4-5	8	+ 48	- 0,8	-307,2	5,12	27,67
5-3	10	+ 13,33	0	0	0	13,33
4-2	10	+ -----	+ 1	-----	10	25,41
$\Sigma=$				-878,31 /EA	34,56 /EA	

MÉTODO DE LAS FLEXIBILIDADES (FUERZAS).

EJECICIO 5

Determinar las reacciones redundantes para el siguiente marco hiperestático.



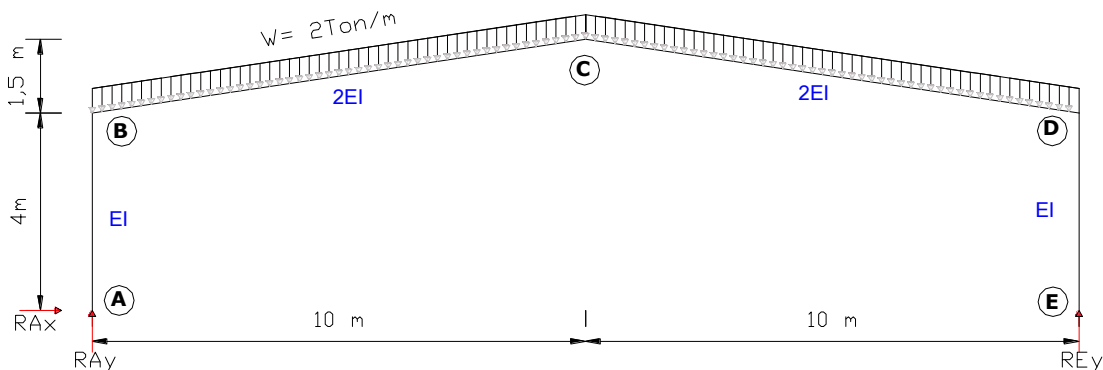
Propiedades de la viga EI como se definen en la figura.

1. Identificación de reacciones redundantes:

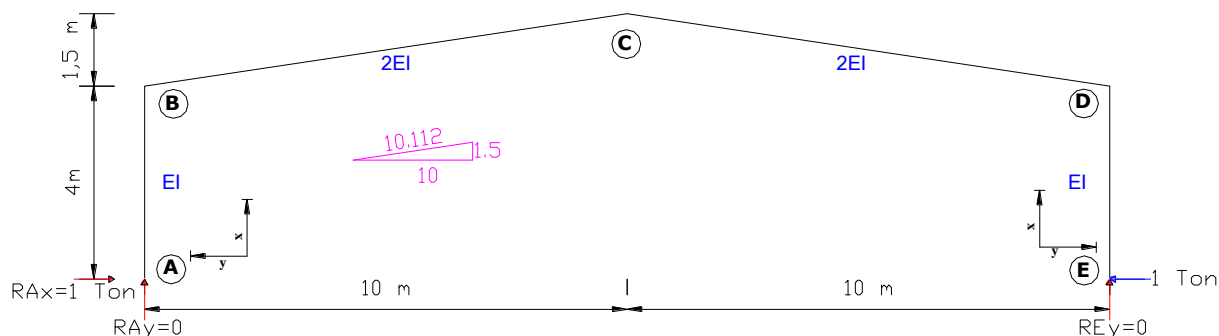
R. Redundantes = No. De reacciones – Ecs. De la estática.

R. Redundantes = $4 - 3 = 1$.

2. Sabiendo que existe una reacción redundante elegimos una de las reacciones del y la proponemos como redundante, en este caso la reacción del apoyo “E”, y como redundante “REx”. Ahora marco puede resolverse estáticamente, sin embargo se presentara un desplazamiento del extremo “E” al quitar el apoyo.



Ahora, en la misma viga pero sin las condiciones de carga real, colocamos una fuerza virtual unitaria que sustituya al apoyo "B" en la dirección "x" la cual producirá otra deformación en la viga y un nuevo desplazamiento.



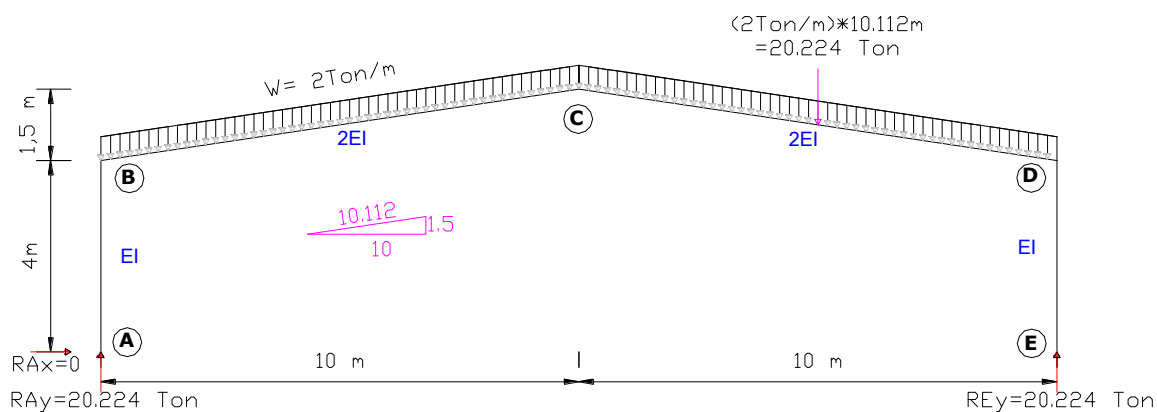
- Condición de desplazamiento para el apoyo debe ser igual acero, con la superposición del efecto de deformación por carga real, contrarrestado por la deformación Horizontal por una fuerza en " R_{Ex} ":

$$\Delta_{EH} + R_{Ex}\delta_{EH} = 0$$

Donde:

$\Delta_{EH} = \int_0^L \frac{Mxmx_H}{EI} dx$	$\delta_{EH} = \int_0^L \frac{mx_Hmx_H}{EI} dx$
---	---

- Obtenemos las reacciones en los apoyos para cada viga y sus correspondientes ecuaciones de momento.



$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0 \quad \mathbf{R_{Ax} = 0}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$- 20.224 \text{ Ton} + R_{Ey} = 0$$

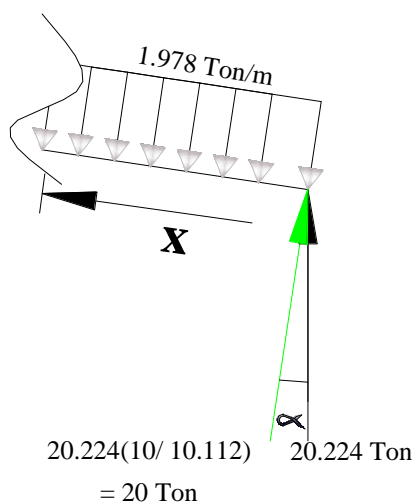
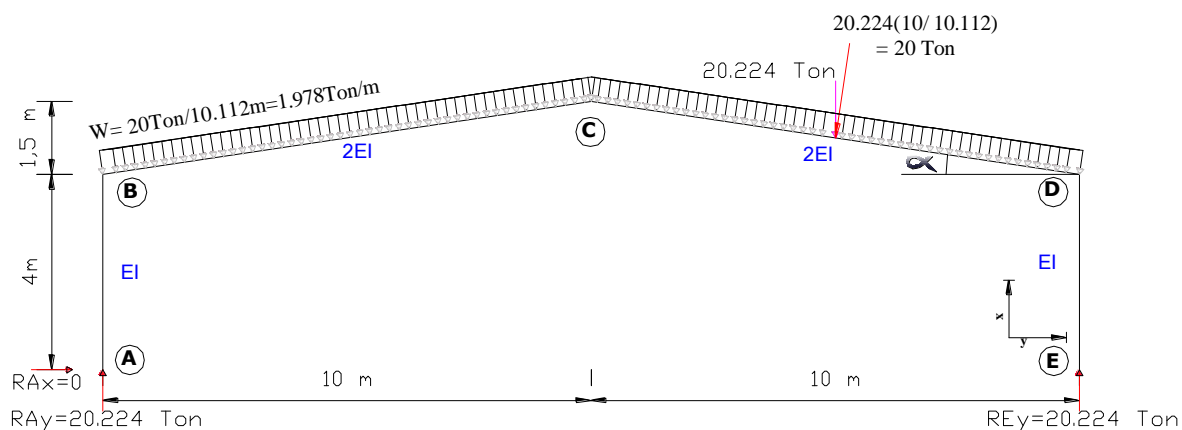
$$\mathbf{R_{Ey} = 20.224 \text{ Ton} \uparrow}$$

$$\mathbf{R_{Ay} = 20.224 \text{ Ton} \uparrow}$$

Ecuaciones de momento.

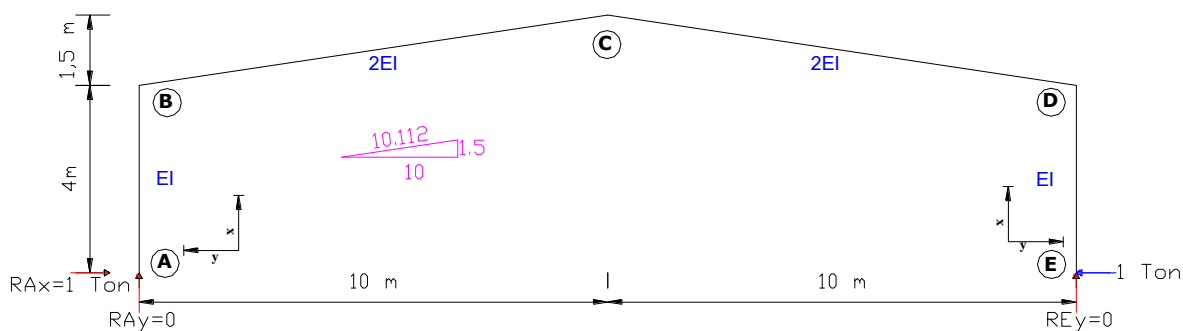
Tramos. (E-D, A-B)..... $M_x = 0$

Tramos. (D-C, B-C): Por la inclinación de las vigas en marco hay que descomponer la fuerza unitaria transmitida, a manera de hacerla normal a la viga.



$$M_x = 20X - (1.978X^2/2)$$

Carga unitaria:



$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

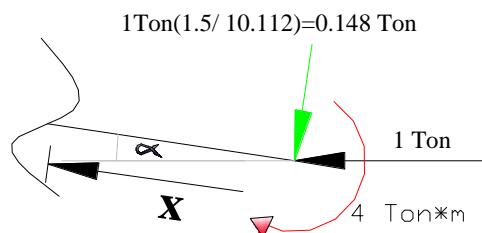
$$-1\text{Ton} + R_{Ax} = 0 \quad R_{Ax} = 1\text{ Ton} \rightarrow$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

Ecuaciones de momento.

Tramos. (E-D, A-B)..... $M_x = -X$

Tramos. (D-C, B-C): Por la inclinación de las vigas en marco hay que descomponer la carga distribuida, a manera de hacerla normal a la viga. Además agregar el momento en el extremo de la barra, causado por la fuerza unitaria.



$$M_x = -4 - 0.148X$$

Tramo	Rango "X"	Ec. M_x	Ec. m_x	l
A-B	$0 \leq X \leq 4$	0	-X	1
B-C	$0 \leq X \leq 10,112$	$20X - (1.978X^2/2)$	$-4 - 0.148X$	2
C-D	$0 \leq X \leq 10,112$	$20X - (1.978X^2/2)$	$-4 - 0.148X$	2
D-E	$0 \leq X \leq 4$	0	-X	1

5. Calculo de los desplazamientos:

$$\begin{aligned}\Delta_{EH} &= 2 \int_0^4 \frac{(0)(-X)}{EI} dx + 2 \int_0^{10.112} \frac{\left(20X - \left(1 \cdot \frac{978X^2}{2}\right)\right)(-4 - 0.148X)}{2EI} dx = \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^{10.112} (-80X - 2.96X^2 + 3.956X^2 + 0.1464X^3) dx = \\ &= \frac{-4090.01 - 1020.19 + 1363.472 + 382.6743}{EI} = \frac{-3364.15}{EI}\end{aligned}$$

$$\delta_{EH} = 2 \int_0^4 \frac{(-X)(-X)}{EI} dx + 2 \int_0^{10.112} \frac{(-4 - 0.148X)(-4 - 0.148X)}{2EI} dx = \frac{272.5416}{EI}$$

6. De la condición de desplazamiento tenemos:

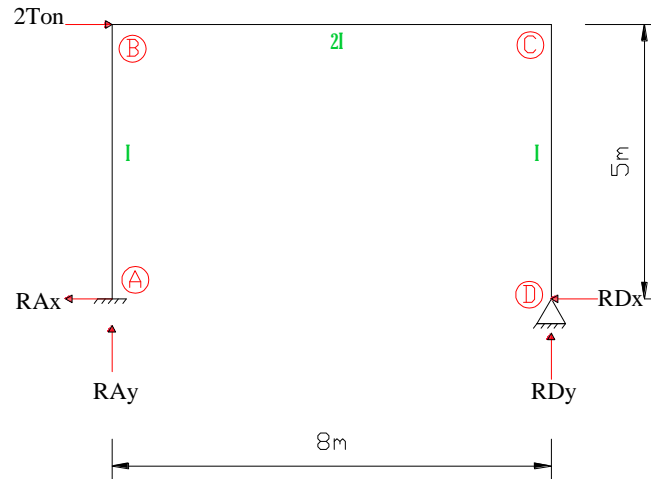
$$\Delta_{EH} + REX\delta_{EH} = 0$$

$$R_{EX} = -\Delta_{EH}/\delta_{EH}$$

$$R_{EX} = -(-3364.15) / 272.5416 = 12.34 \text{ Ton} \leftarrow$$

MÉTODO DE FLEXIBILIDADES.

Aplicar el método de trabajo virtual, para encontrar las reacciones redundantes en el marco mostrado, considerando solo los efectos de flexión.



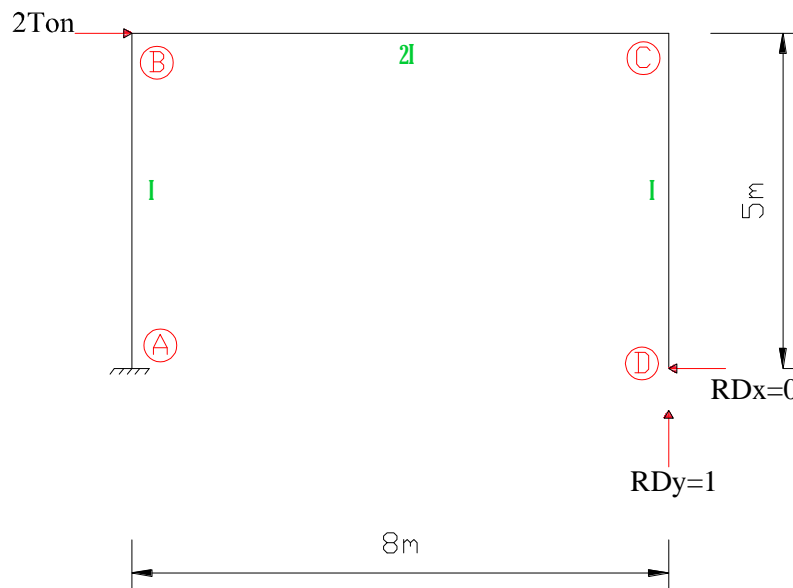
Propiedades de la viga. EI como se definen en la figura.

1. Identificación de reacciones redundantes:

R. Redundantes = No. De reacciones – Ecs. De la estática.

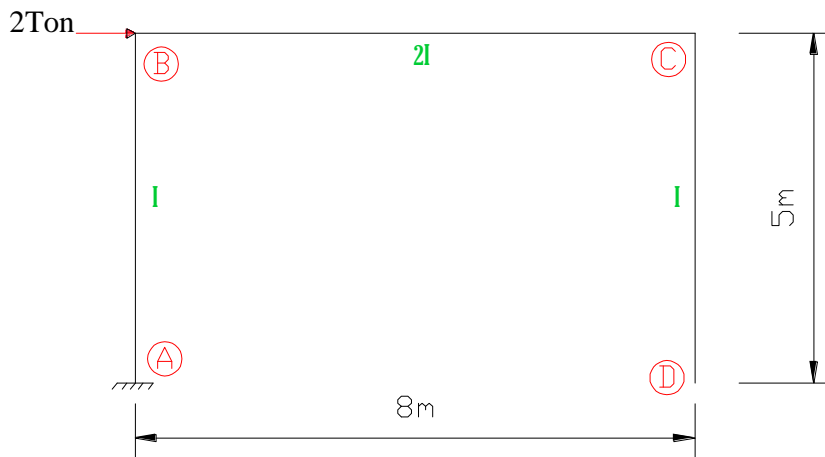
R. Redundantes = $5 - 3 = 2$.

2. Considerando “ RDx ” y “ RDy ” como las reacciones redundantes:

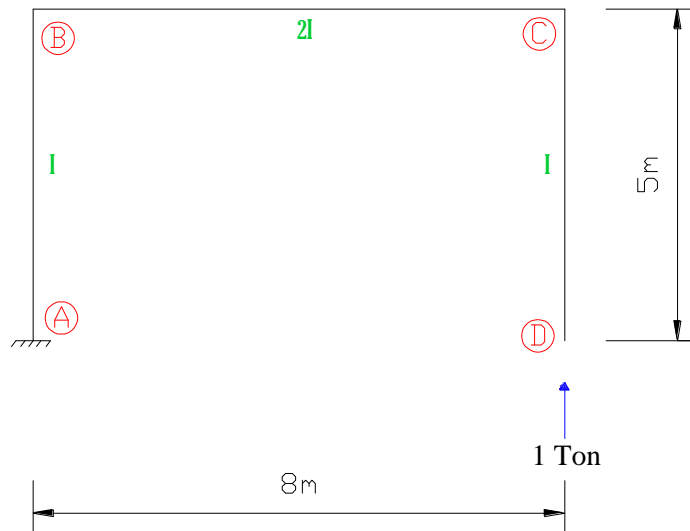


Con las siguientes condiciones de carga en el marco:

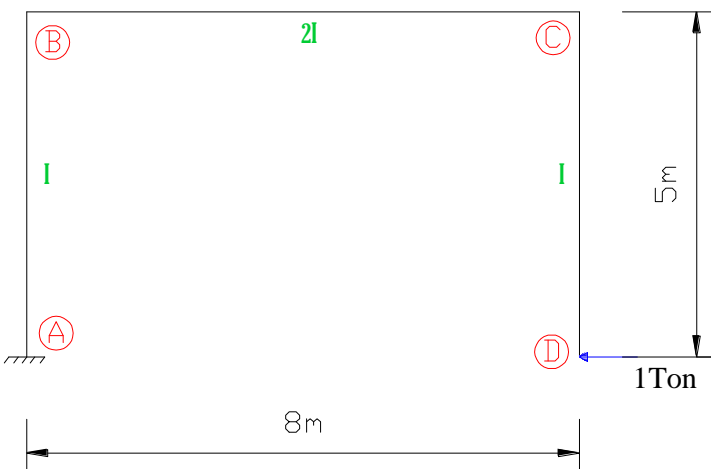
Por carga real:



Fuerza unitaria vertical.



Fuerza unitaria horizontal.



3. Condición de desplazamiento para el apoyo debe ser igual acero, con la superposición del efecto de deformación por carga real, contrarrestado por las deformaciones Horizontal y Vertical del extremo D por una fuerza en "RDx" y una en "RDy":

$$\Delta_{HD} + \delta_{HH}R_{HD} + \delta_{HV}R_{VD} = 0$$

$$\Delta_{VD} + \delta_{HV}R_{HD} + \delta_{VV}R_{VD} = 0$$

Donde:

$$\Delta_{HD} = \int_0^L \frac{Mxmx_H}{EI} dx$$

$$\delta_{HH} = \int_0^L \frac{mx_Hmx_H}{EI} dx$$

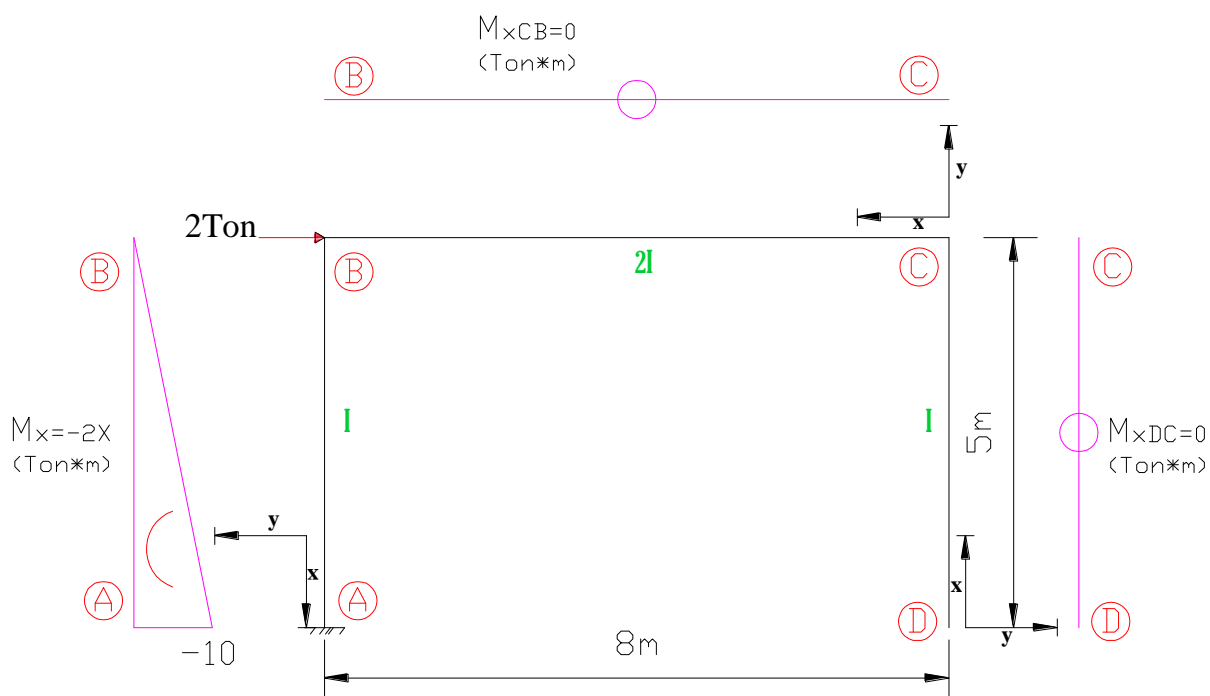
$$\Delta_{VD} = \int_0^L \frac{Mxmx_V}{EI} dx$$

$$\delta_{VV} = \int_0^L \frac{mx_Vmx_V}{EI} dx$$

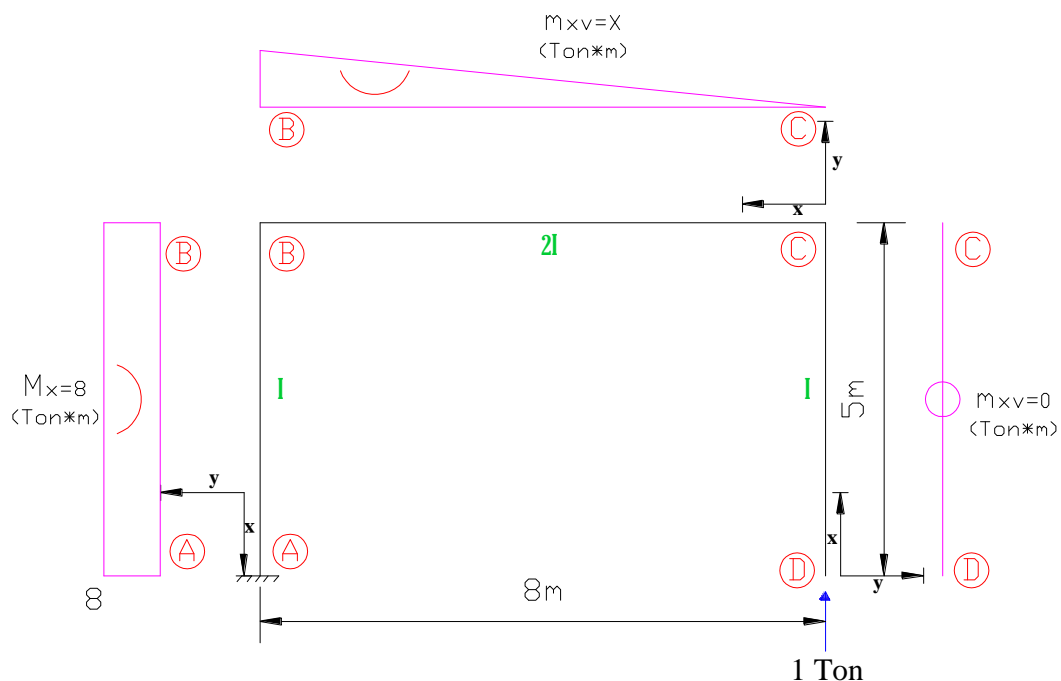
$$\delta_{HV} = \delta_{VH} = \int_0^L \frac{mx_Hmx_V}{EI} dx$$

4. Obtenemos las ecuaciones de momento para cada elemento del marco.

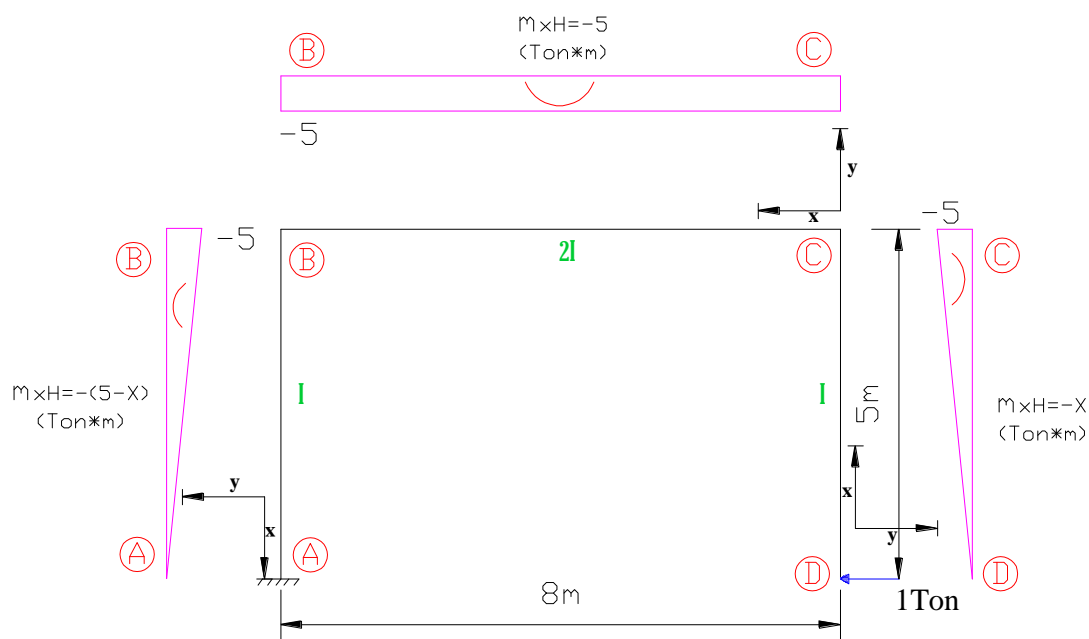
Por carga real:



Carga virtual "RDy" = 1 Ton



Carga virtual "RDx" = 1 Ton



Tramo	Rango "X"	Ec. Mx	Ec. mxv	Ec. mxH	I
D-C	$0 \leq X \leq 5$	0	0	-X	1
C-B	$0 \leq X \leq 8$	0	X	-5	2
B-A	$0 \leq X \leq 5$	-2X	8	-(5-X)	1

5. Calculo de los desplazamientos:

$$\Delta VD = \int_0^L \frac{Mxmx_v}{EI} dx = 0 + 0 + \frac{1}{EI} \frac{1}{2} abL = \frac{1}{2EI} (-10)(8)(5) = \frac{-200}{EI}$$

$$\Delta HD = \int_0^L \frac{Mxmx_H}{EI} dx = 0 + 0 + \frac{1}{EI} \frac{1}{6} abL = \frac{1}{6EI} (-10)(-5)(5) = \frac{41.67}{EI}$$

$$\delta VV = \int_0^L \frac{mx_vmx_v}{EI} dx = 0 + \frac{1}{2EI} \frac{1}{3} abL + \frac{1}{EI} abL = \frac{1}{6EI} (8)(8)(8) + \frac{1}{EI} (8)(8)(5) =$$

$$\frac{85.33}{EI} + \frac{320}{EI} = \frac{405.33}{EI}$$

$$\delta HH = \int_0^L \frac{mx_Hmx_H}{EI} dx = \frac{1}{EI} \frac{1}{3} abL + \frac{1}{2EI} abL + \frac{1}{EI} \frac{1}{3} abL =$$

$$\frac{1}{3EI} (-5)(-5)(5) + \frac{1}{2EI} (-5)(-5)(8) + \frac{1}{3EI} (-5)(-5)(5) = \frac{183.33}{EI}$$

$$\delta HV = \delta VH = \int_0^L \frac{mx_Hmx_v}{EI} dx = 0 + \frac{1}{2EI} \frac{1}{2} abL + \frac{1}{EI} \frac{1}{2} abL =$$

$$\frac{1}{4EI} (8)(-5)(8) + \frac{1}{2EI} (8)(-5)(5) = \frac{-180}{EI}$$

6. De la condición de desplazamiento en el apoyo redundante tenemos:

$$\Delta HD + \delta HH R_{HD} + \delta HV R_{VD} = 0$$

$$\Delta VD + \delta HV R_{HD} + \delta VV R_{VD} = 0$$

$$\frac{41.67}{EI} + \frac{183.33}{EI} R_{HD} - \frac{180}{EI} R_{VD} = 0 \therefore \frac{183.33}{EI} R_{HD} - \frac{180}{EI} R_{VD} = -\frac{41.67}{EI}$$

$$-\frac{200}{EI} - \frac{180}{EI} R_{HD} + \frac{405.33}{EI} R_{VD} = 0 \therefore -\frac{180}{EI} R_{HD} + \frac{405.33}{EI} R_{VD} = \frac{200}{EI}$$

Sistema de ecuaciones a resolver. (En Forma Matricial).

$$\frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 183.33 & -180 \\ -180 & 405.33 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} RHD \\ RVD \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} -41.67 \\ 200 \end{Bmatrix}$$

Método de las Flexibilidades:

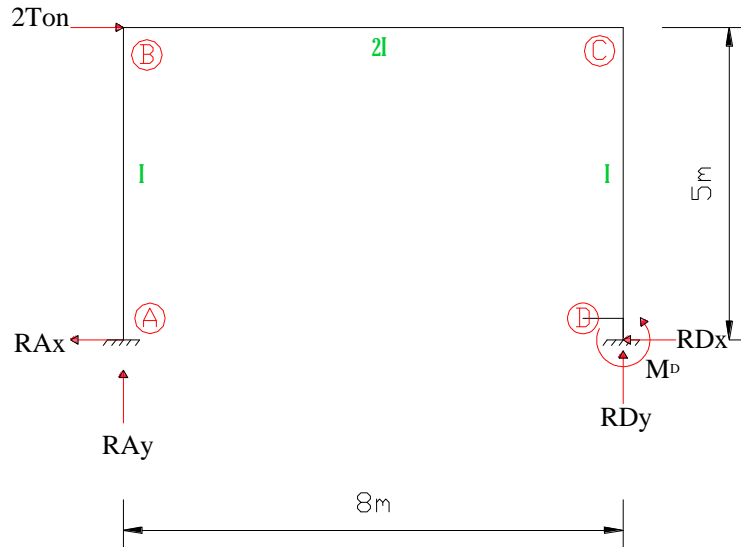
$$\begin{aligned} & \{F\}[f] = \{\Delta\} \\ \text{Asi} \quad & \{F\} = [f]^{-1}\{\Delta\} = [K]\{\Delta\} \end{aligned}$$

$$\mathbf{RHD = RD_x = 0.4559 \text{ Ton} \leftarrow}$$

$$\mathbf{RVD = RD_y = 0.6959 \text{ Ton} \uparrow}$$

MÉTODO DE FLEXIBILIDADES.

Aplicar el método de trabajo virtual, para encontrar las reacciones redundantes en el marco mostrado, considerando solo los efectos de flexión.



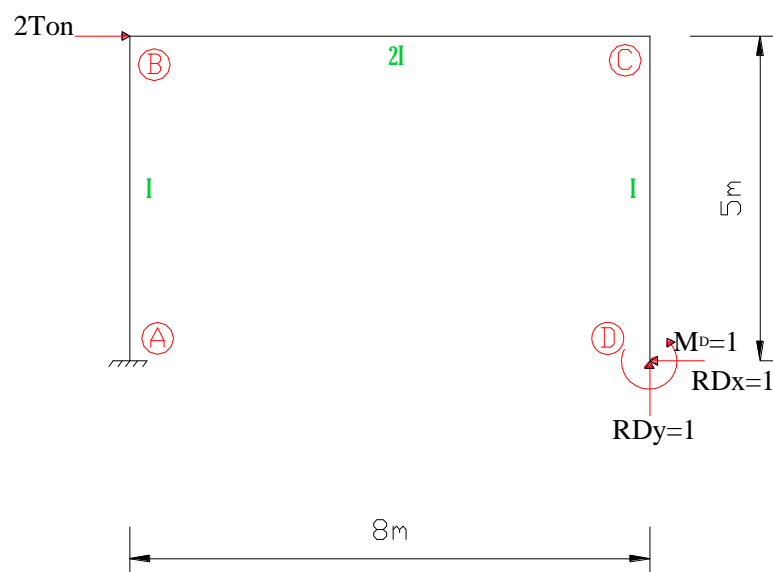
Propiedades de la viga. EI como se definen en la figura.

1. Identificación de reacciones redundantes:

R. Redundantes = No. De reacciones – Ecs. De la estática.

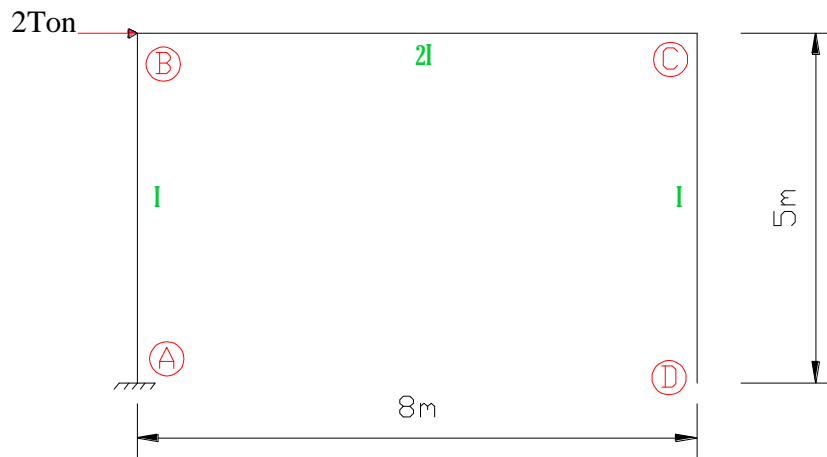
R. Redundantes= 6– 3=3.

2. Considerando “RDx”, “RDy” Y “MD” como las reacciones redundantes:

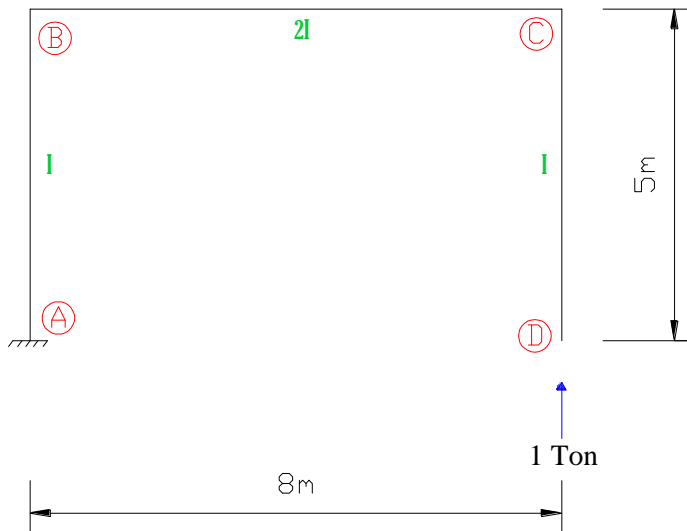


Con las siguientes condiciones de carga en el marco:

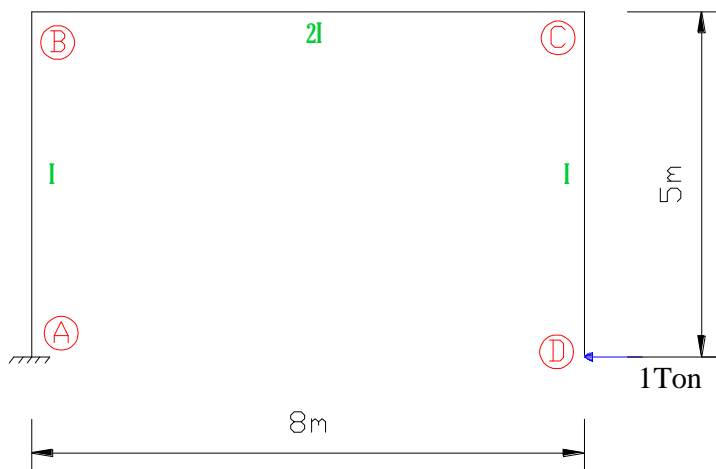
Por carga real:



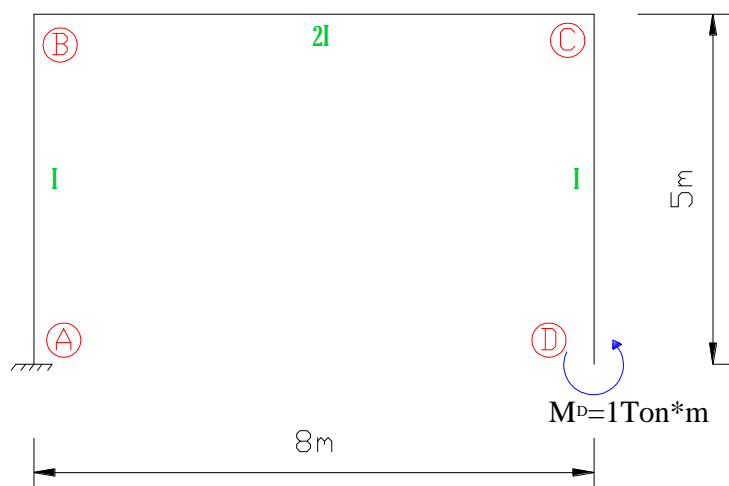
Fuerza unitaria vertical.



Fuerza unitaria horizontal.



Momento unitario.



3. Condición de desplazamiento para el apoyo debe ser igual acero, con la superposición del efecto de deformación por carga real, contrarrestado por las deformaciones Horizontal y Vertical del extremo D por una fuerza en "RDx" y una en "RDy":

$$\Delta_{HD} + \delta_{HH}R_{HD} + \delta_{HV}R_{VD} + \delta_{HM}M_D = 0$$

$$\Delta_{VD} + \delta_{HV}R_{HD} + \delta_{VV}R_{VD} + \delta_{VM}M_D = 0$$

$$\theta_D + \theta_{HR}R_{HD} + \theta_{VR}R_{VD} + \theta_{mm}M_D = 0$$

Donde:

$$\Delta_{HD} = \int_0^L \frac{Mx m x_H}{EI} dx$$

$$\delta_{HH} = \int_0^L \frac{m x_H m x_H}{EI} dx$$

$$\Delta_{VD} = \int_0^L \frac{Mx m x_V}{EI} dx$$

$$\delta_{VV} = \int_0^L \frac{m x_V m x_V}{EI} dx$$

$$\theta_D = \int_0^L \frac{Mx m x_m}{EI} dx$$

$$\theta_{mm} = \int_0^L \frac{m x_m m x_m}{EI} dx$$

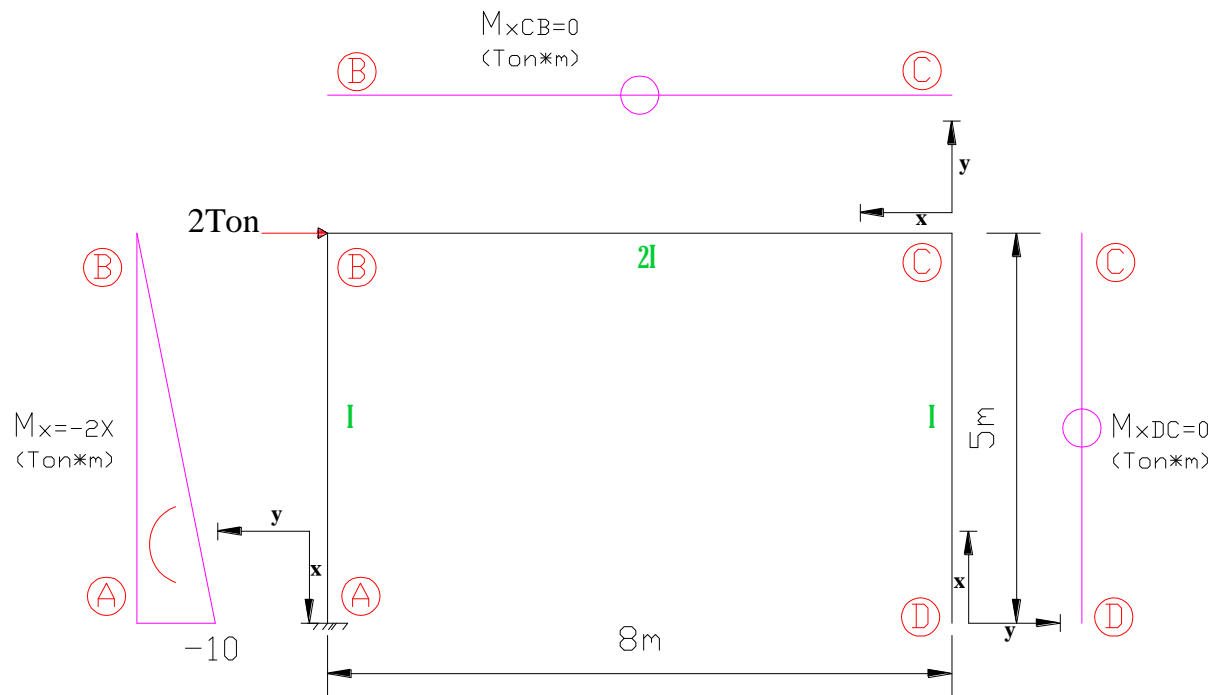
$$\delta_{HV} = \delta_{VH} = \int_0^L \frac{m x_H m x_V}{EI} dx$$

$$\theta_{HR} = \delta_{HM} = \int_0^L \frac{m x_H m x_m}{EI} dx$$

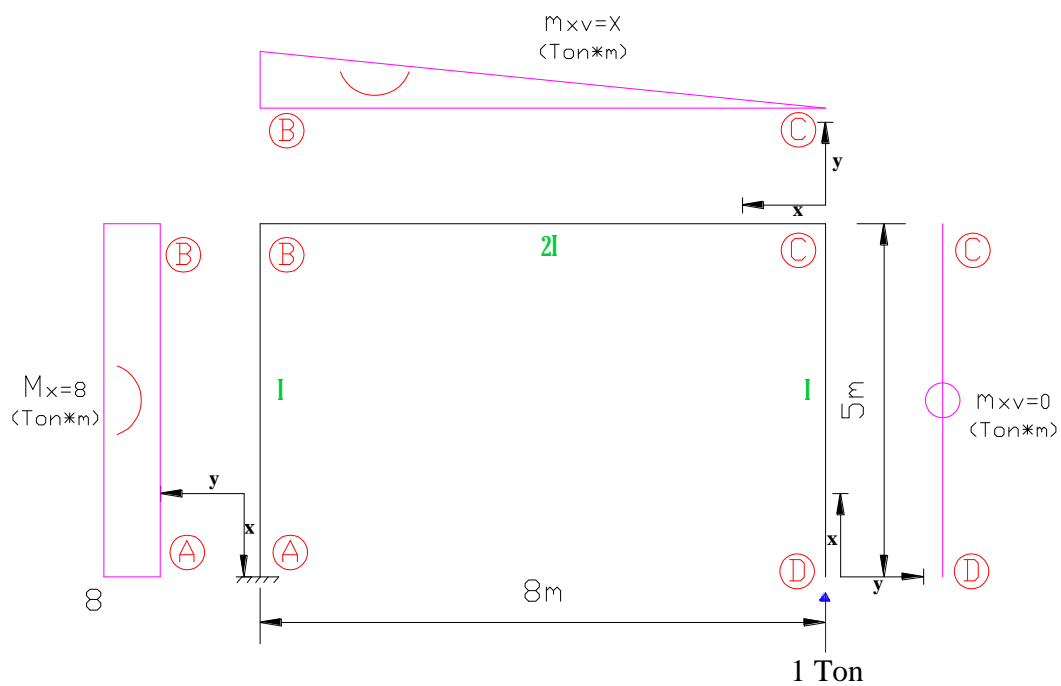
$$\theta_{VR} = \delta_{VM} = \int_0^L \frac{m x_V m x_m}{EI} dx$$

4. Obtenemos las ecuaciones de momento para cada elemento del marco.

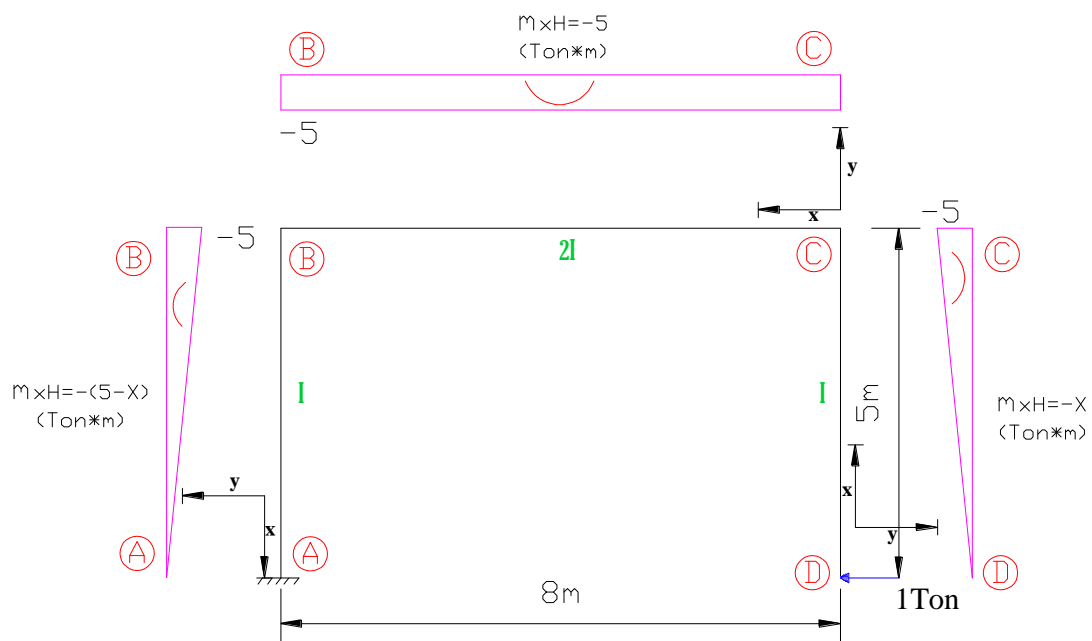
Por carga real:



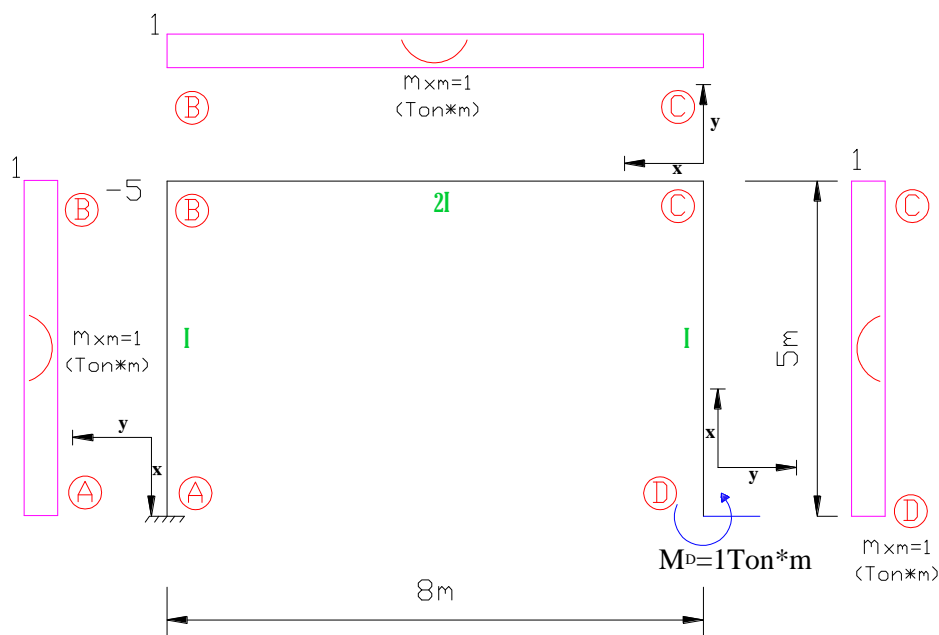
Carga virtual "RDy" = 1 Ton



Carga virtual "RDx" = 1 Ton



Momento virtual "MD" = 1 Ton*m



Tramo	Rango "X"	Ec. M_x	Ec. m_{xv}	Ec. m_{xH}	Ec. m_{xm}	I
D-C	$0 \leq X \leq 5$	0	0	-X	1	1
C-B	$0 \leq X \leq 8$	0	X	-5	1	2
B-A	$0 \leq X \leq 5$	-2X	8	-(5-X)	1	1

5. Cálculo de los desplazamientos:

$$\Delta VD = \int_0^L \frac{M_x m_{xv}}{EI} dx = 0 + 0 + \frac{1}{EI} \frac{1}{2} abL = \frac{1}{2EI} (-10)(8)(5) = \frac{-200}{EI}$$

$$\Delta HD = \int_0^L \frac{M_x m_{xH}}{EI} dx = 0 + 0 + \frac{1}{EI} \frac{1}{6} abL = \frac{1}{6EI} (-10)(-5)(5) = \frac{41.67}{EI}$$

$$\delta VV = \int_0^L \frac{m_{xv} m_{xv}}{EI} dx = 0 + \frac{1}{2EI} \frac{1}{3} abL + \frac{1}{EI} abL = \frac{1}{6EI} (8)(8)(8) + \frac{1}{EI} (8)(8)(5) =$$

$$\frac{85.33}{EI} + \frac{320}{EI} = \frac{405.33}{EI}$$

$$\delta HH = \int_0^L \frac{m_{xH} m_{xH}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \frac{1}{3} abL + \frac{1}{2EI} abL + \frac{1}{EI} \frac{1}{3} abL =$$

$$\frac{1}{3EI} (-5)(-5)(5) + \frac{1}{2EI} (-5)(-5)(8) + \frac{1}{3EI} (-5)(-5)(5) = \frac{183.33}{EI}$$

$$\delta HV = \delta VH = \int_0^L \frac{mx_H mx_V}{EI} dx = 0 + \frac{1}{2EI} \frac{1}{2} abL + \frac{1}{EI} \frac{1}{2} abL =$$

$$\frac{1}{4EI} (8)(-5)(8) + \frac{1}{2EI} (8)(-5)(5) = \frac{-180}{EI}$$

$$\theta D = \int_0^L \frac{Mx mx_m}{EI} dx = 0 + 0 + \frac{1}{EI} \frac{1}{2} abL = \frac{1}{2EI} (-10)(1)(5) = \frac{-25}{EI}$$

$$\theta mm = \int_0^L \frac{mx_m mx_m}{EI} dx = \frac{abL}{EI} + \frac{abL}{E(2I)} + \frac{abL}{EI} =$$

$$\frac{(1)(1)(5)}{EI} + \frac{(1)(1)(8)}{2EI} + \frac{(1)(1)(5)}{EI} = \frac{14}{EI}$$

$$\theta HR = \delta HM = \int_0^L \frac{mx_H mx_m}{EI} dx = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} abL + \frac{1}{E(2I)} abL + \frac{1}{EI} \frac{1}{2} abL =$$

$$\frac{1}{2EI} (-5)(1)(5) + \frac{1}{2EI} (-5)(-1)(8) + \frac{1}{2EI} (-5)(1)(5) = \frac{-45}{EI}$$

$$\theta VR = \delta VM = \int_0^L \frac{mx_V mx_m}{EI} dx = 0 + \frac{1}{2} \frac{abL}{E(2I)} + \frac{abL}{EI} =$$

$$\frac{(8)(1)(8)}{4EI} + \frac{(8)(1)(5)}{EI} = \frac{56}{EI}$$

6. De la condición de desplazamiento en el apoyo redundante tenemos:

$$\Delta HD + \delta HHRHD + \delta HVRVD + \delta HMMD = 0$$

$$\Delta VD + \delta HVRHD + \delta VVRVD + \delta VMMD = 0$$

$$\theta D + \theta HRRHD + \theta VRRVD + \theta mmMD = 0$$

$$\frac{41.67}{EI} + \frac{183.33}{EI} RHD - \frac{180}{EI} RVD - \frac{45}{EI} MD = \therefore$$

$$\frac{183.33}{EI} RHD - \frac{180}{EI} RVD - \frac{45}{EI} MD = -\frac{41.67}{EI}$$

$$-\frac{200}{EI} - \frac{180}{EI} RHD + \frac{405.33}{EI} RVD + \frac{56}{EI} MD = 0 \therefore$$

$$-\frac{180}{EI} RHD + \frac{405.33}{EI} RVD + \frac{56}{EI} MD = \frac{200}{EI}$$

$$-\frac{25}{EI} - \frac{45}{EI}R_{HD} + \frac{56}{EI}R_{VD} + \frac{14}{EI}M_D = 0 \therefore$$

$$-\frac{45}{EI}R_{HD} + \frac{56}{EI}R_{VD} + \frac{14}{EI}M_D = \frac{25}{EI}$$

Sistema de ecuaciones a resolver. (En Forma Matricial).

$$\frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 183.33 & -180 & -45 \\ -180 & 405.33 & 56 \\ -45 & 56 & 14 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_{HD} \\ R_{VD} \\ M_D \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} -41.67 \\ 200 \\ 25 \end{Bmatrix}$$

Método de las Flexibilidades:

$$\{F\}[f] = \{\Delta\}$$

Asi $\{F\} = [f]^{-1}\{\Delta\} = [K]\{\Delta\}$

$$R_{HD} = R_{Dx} = 1 \text{ Ton} \leftarrow$$

$$R_{VD} = R_{Dy} = 0.551 \text{ Ton} \uparrow$$

$$M_D = 2.794 \text{ Ton}\cdot\text{m} \curvearrowright$$

METODO PENDIENTE-DEFLEXION

INTRODUCCION

El método de deflexión de la pendiente es un método general aplicable en el análisis de vigas y marcos rígidos, sean estáticamente determinados o indeterminados. Esta característica del método fue fundamental para que se constituyera como uno de los principales métodos de análisis estructural, desde su presentación en 1915; sin embargo, su popularidad disminuyó con la presentación de la técnica de relajación de la distribución de momentos (i.e. método de Cross). En la clasificación moderna de los diferentes métodos de análisis estructural (métodos de fuerzas y desplazamientos) este método ha sido ubicado en el grupo de los métodos de desplazamiento.

DESCRIPCION GENERAL

El método se basa en la determinación de los desplazamientos de los nodos. Para lograrlo, es necesario establecer las ecuaciones de equilibrio de fuerzas en la dirección de los desplazamientos considerados en la estructura.

Con la aplicación de las relaciones esfuerzo-deformación del material, las fuerzas internas de los elementos que concurren al nodo se pueden expresar en función de los desplazamientos del nodo. Estas expresiones conocidas como **ecuaciones pendiente-deflexión** se sustituyen en la ecuaciones de equilibrio y se obtienen estas últimas en función de los desplazamientos de los nodos. De esta forma se genera un sistema de ecuaciones en el que las incógnitas corresponden a los valores de los desplazamientos. Este sistema tiene como particularidad que la cantidad de ecuaciones de equilibrio, es igual a la de desplazamientos. Al establecer los valores que adquieren los desplazamientos, estos se aplican a las ecuaciones pendiente-deflexión, obteniéndose con ello los momentos flexionantes totales en los extremos de los elementos estructurales.

Este método en su forma convencional es obsoleto hoy en día, sin embargo se sigue considerando como uno de los métodos de desplazamiento más importante de acuerdo con las siguientes consideraciones:

1. Para algunos sistemas estructurales simples (vigas, marcos rígidos) el método puede presentar una solución rápida.
2. Las ecuaciones fundamentales del método sirven de base para el desarrollo del método de distribución de momentos.
3. Las ecuaciones fundamentales del método establecen la base de introducción de métodos de formulación matricial.

DEDUCCION DE LAS ECUACIONES

Las ecuaciones pendiente-deflexión, con las que se determinan los momentos flexionantes en los extremos de los elementos estructurales, considerando efectos de flexión y despreciando los efectos de la fuerza cortante, fuerza normal y torsión, se establecen en función de:

- Cargas en el claro.
- Rotaciones en los extremos de los elementos estructurales. (Giros de la tangente en los extremos de la curva elástica de la barra.)
- Desplazamiento transversal relativo de los extremos del elemento estructural. (Rotación de la cuerda que une los extremos de la curva elástica de la barra.)

Tomando en cuenta únicamente las condiciones de carga y deformación mencionados, las ecuaciones pendiente-deflexión, en un miembro prismático con comportamiento elástico lineal, se obtienen como una superposición de causas y efectos a través de las siguientes consideraciones:

1. Considérese el elemento estructural mostrado en la siguiente figura (el cual puede ser uno de los elementos estructurales que conforman un marco rígido).

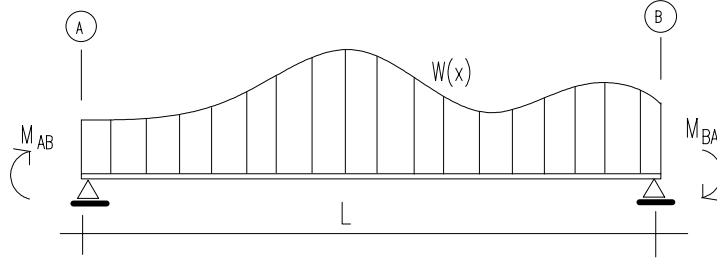


Fig 1.1 Condición general de carga en un elemento estructural.

Se establece la condición de fijación de los nodos impidiendo desplazamientos angulares y de translación en los extremos. Es posible de esta manera calcular los momentos de empotramiento.

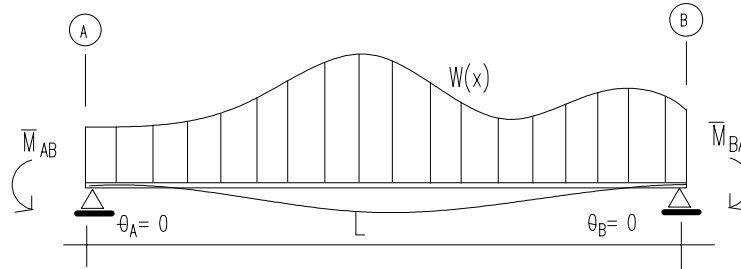


Fig. 1.2 Condición de fijación de nodos.

2. Por condiciones de carga externa, los nodos A y B se consideran sometidos a la acción de momentos desequilibrantes, lo que origina desplazamientos angulares en tales nodos.

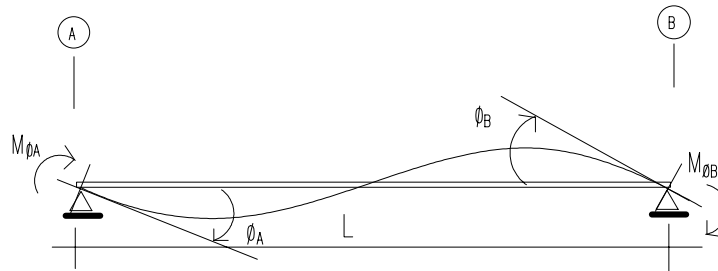


Fig. 1.3 Condición de fuerzas en los nodos, por giros únicamente.

3. Es posible que se dé un desplazamiento transversal Δ , relativo entre los nodos A y B, que origina una rotación

$$\phi = \frac{\Delta}{L}$$

de la cuerda que une los extremos A y B de la curva elástica. El desplazamiento Δ puede ser ocasionado por asentamientos en los apoyos o bien por aplicación de fuerzas horizontales en el caso de marcos rígidos.

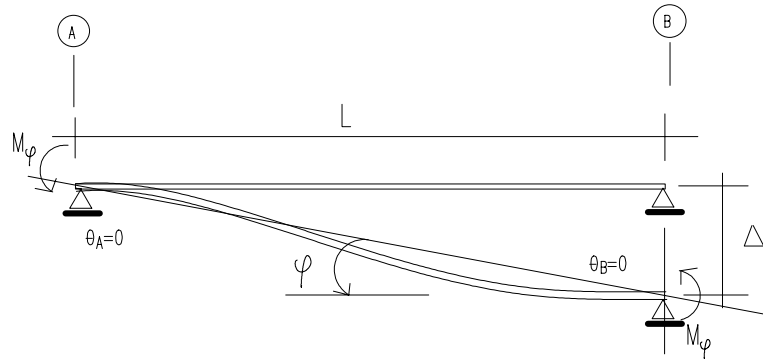


Fig. 1.4 Condición de fuerzas en los nodos por rotación del eje del elemento estructural.

Considerando los giros en los extremos y la rotación del eje del elemento estructural, se tendrá la configuración de deformación mostrada en la siguiente fig., es necesario hacer notar que los desplazamientos son producidos exclusivamente por flexión.

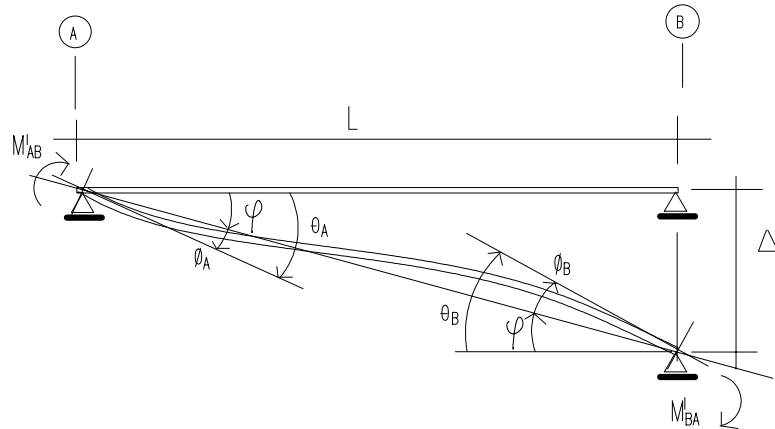


Fig. 1.5 Condición de fuerzas en los nodos por giros y rotación del eje del elemento estructural.

El momento final en los extremos de la barra, estará determinado por la suma algebraica

$$\begin{aligned} M_{AB} &= \overline{M}_{AB} + M'_{AB} \\ M_{BA} &= \overline{M}_{BA} + M'_{BA} \end{aligned} \quad (1.1)$$

o bien

$$\begin{aligned} M_{AB} &= \overline{M}_{AB} + (M_{\phi A} + M\phi) \\ M_{BA} &= \overline{M}_{BA} + (M_{\phi B} + M\phi) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Determinar los momentos finales en los extremos de los elementos estructurales, será posible mediante la suma algebraica de los términos que corresponden a un nodo en particular, a partir de las siguientes tres etapas:

1. Se fijan los nodos evitando el desplazamiento angular y transversal y se calculan los momentos de empotramiento.
2. Se permite el giro en el extremo A y se establecen los momentos para esta condición de deformación, se permite el giro en el extremo opuesto y se establecen los momentos para esta nueva condición de deformación.
3. Se permite el desplazamiento transversal relativo entre los puntos A y B del elemento estructural y se determina el momento que establece la condición de deformación.

A partir de la última figura, se tiene que

$$\begin{aligned}\phi_A &= \theta_A - \varphi \\ \phi_B &= \theta_B - \varphi\end{aligned}\quad (1.3)$$

Los giros ϕ_A y ϕ_B se pueden determinar por los teoremas de Mohr ó por el método de la viga conjugada, que por el principio de superposición la condición de carga mostrada en la fig 1.1 se puede separar en las siguientes condiciones de carga

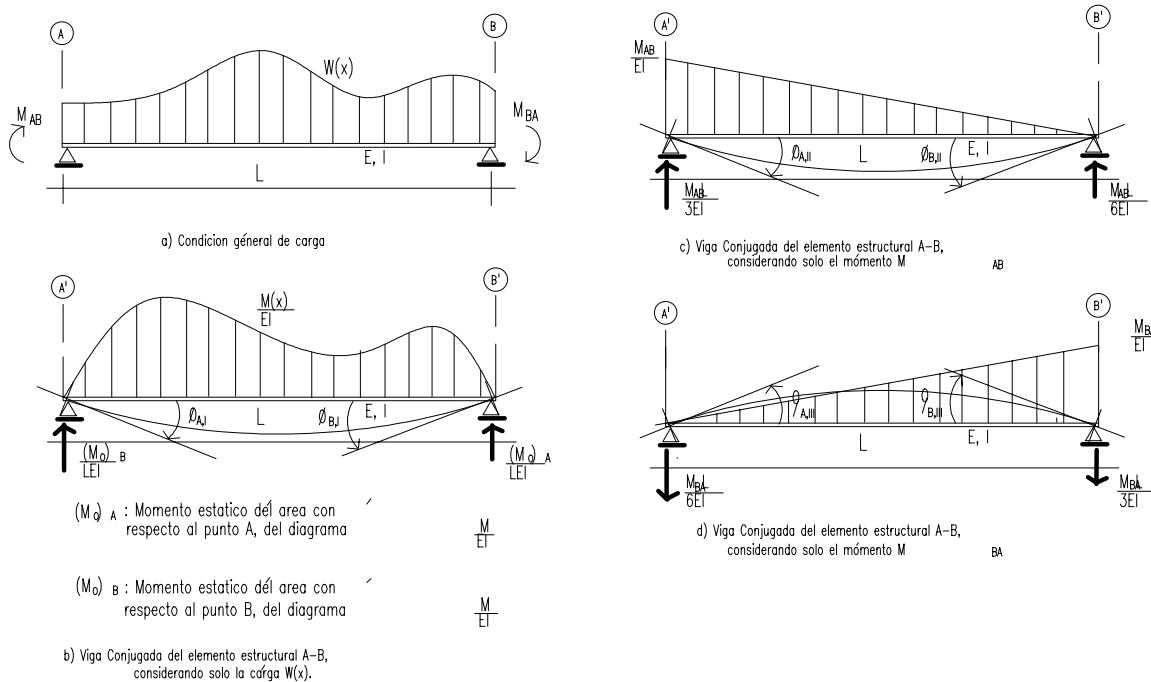


Fig 1.6 Determinación de las rotaciones en A y B, por aplicación de la Viga Conjugada, considerando cada una de las condiciones de carga actuando en el elemento estructural,

De acuerdo con el primer corolario de la viga conjugada:

$$\phi_x = \frac{V_x}{EI} \quad (1.4)$$

y del principio de superposición de causas y efectos (de la fig. 1.6):

$$\begin{aligned}\phi_A &= \phi_{A,I} + \phi_{A,II} - \phi_{A,III} \\ \phi_B &= -\phi_{B,I} - \phi_{B,II} + \phi_{B,III}\end{aligned}\quad (1.5)$$

De la fig. 1.6 se tiene que:

$$\begin{aligned}\phi_A &= \frac{(M_o)_B}{LEI} + \frac{M_{AB}L}{3EI} - \frac{M_{BA}L}{6EI} \\ \phi_B &= -\frac{(M_o)_A}{LEI} - \frac{M_{AB}L}{6EI} + \frac{M_{BA}L}{3EI}\end{aligned}\quad (1.6)$$

Sustituyendo estas últimas en (1.3), se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{(M_o)_B}{LEI} + \frac{M_{AB}L}{3EI} - \frac{M_{BA}L}{6EI} &= \theta_A - \phi \\ -\frac{(M_o)_A}{LEI} - \frac{M_{AB}L}{6EI} + \frac{M_{BA}L}{3EI} &= \theta_B - \phi\end{aligned}\quad (1.7)$$

Resolviendo las ecuaciones simultáneas (1.7), se tiene

$$\begin{aligned}M_{AB} &= \frac{2EI}{L}(2\theta_A + \theta_B - 3\phi) + \frac{2}{L^2}[(M_o)_A - 2(M_o)_B] \\ M_{BA} &= \frac{2EI}{L}(\theta_A + 2\theta_B - 3\phi) + \frac{2}{L^2}[2(M_o)_A - (M_o)_B]\end{aligned}\quad (1.8)$$

Si se considera el elemento estructural como una viga con dos extremos empotrados, las condiciones de desplazamiento en los apoyos son

$$\theta_A = \theta_B = \phi = 0$$

Sustituyendo estos valores en (1.8)

$$\begin{aligned}M_{AB} &= \frac{2}{L^2}[(M_o)_A - 2(M_o)_B] \\ M_{BA} &= \frac{2}{L^2}[2(M_o)_A - (M_o)_B]\end{aligned}\quad (1.9)$$

Las expresiones anteriores deben ser entonces los momentos de empotramiento \overline{M}_{AB} y \overline{M}_{BA} . Así pues, en forma general las expresiones (1.8) se plantean como

$$\begin{aligned}M_{AB} &= \frac{2EI}{L}(2\theta_A + \theta_B - 3\phi) + \overline{M}_{AB} \\ M_{BA} &= \frac{2EI}{L}(\theta_A + 2\theta_B - 3\phi) + \overline{M}_{BA}\end{aligned}$$

Las cuales son conocidas como las **ecuaciones pendiente-deflexión**.

En los siguientes ejemplos de este capítulo, se aplicarán las ecuaciones pendiente – deflexión, en la determinación de diagramas de fuerza cortante y momento flexionantes, tanto en vigas como en marcos, a partir de las deformaciones de estas estructuras.

Ejercicio 1.1

Aplicar el método pendiente-deflexión a la viga mostrada en la figura, para determinar los elementos mecánicos en los extremos de cada uno de los tramos, así como las rotaciones en los apoyos.

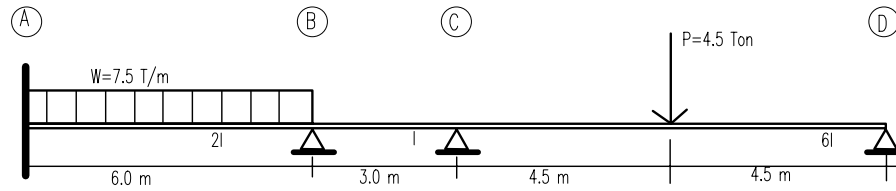


Fig. 1.7 Viga continua del ejercicio 1.1

SOLUCION

I. CONDICIONES GENERALES DE DEFORMACION

Rotaciones θ :

En el apoyo "A", $\theta_A = 0$.

En el apoyo "B", $\theta_B \neq 0$.

En el apoyo "C", $\theta_C \neq 0$.

En el apoyo "D", $\theta_D \neq 0$.

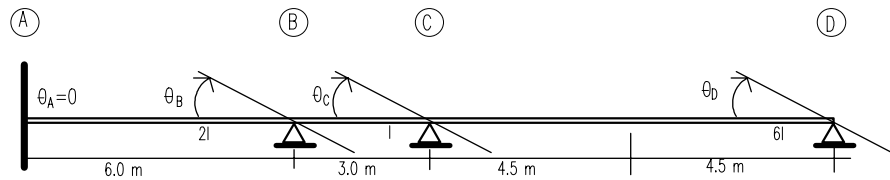


Fig. 1.8 Desplazamientos angulares a considerar en la deformación.

Nótese que los desplazamientos se han supuesto en sentido positivo, el sentido correcto será determinado posteriormente.

Desplazamientos transversales relativos ϕ :

En todos los tramos son nulos, debido a que no se presentan desplazamientos verticales en los apoyos, por lo que $\phi = 0$ en cada uno de los tramos.

II. MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO.

Tramo AB

Condición de carga:

uniformemente distribuida $w = 7.5 \text{ ton/m}$, $L = 6.0 \text{ m}$.

En el extremo "A",

$$\overline{M}_{AB} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{(7.5)(6.0)^2}{12} = -22.5 \text{ ton-m}$$

En el extremo "B",

$$\overline{M}_{BA} = \frac{wL^2}{12} = \frac{(7.5)(6.0)^2}{12} = 22.5 \text{ ton-m}$$

Tramo BC

No hay condición de carga.

En el extremo "B", $\overline{M}_{BC} = 0$

En el extremo "C", $\overline{M}_{CB} = 0$

Tramo CD

Condición de carga:

concentrada al centro del claro $P = 4.5 \text{ ton}$, $L = 9.0 \text{ m}$

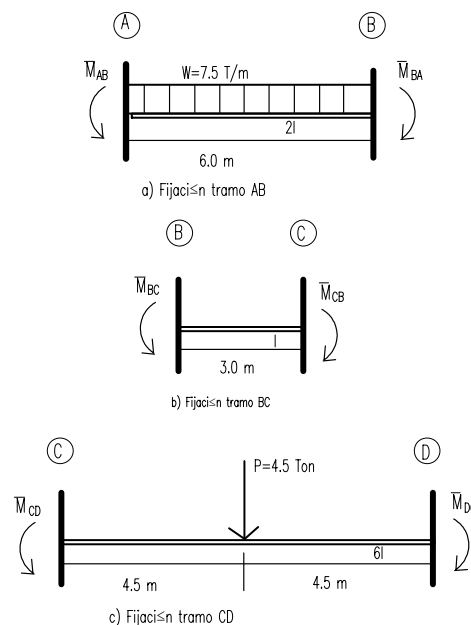


Fig. 1.9 Condiciones de fijación

En el extremo "C", $\overline{M}_{CD} = -\frac{PL}{8} = -\frac{(4.5)(9.0)}{8} = -5.06 \text{ ton} \cdot \text{m}$

En el extremo "D", $\overline{M}_{DC} = \frac{PL}{8} = \frac{(4.5)(9.0)}{8} = 5.06 \text{ ton} \cdot \text{m}$

III) RIGIDECEZ RELATIVAS $\left(K = \frac{I}{L}\right)$

Tramo	Inercia	Long.	$K=I/L$	
AB	$2I$	6.0	$0.333I$	$0.333I/0.333I=k$
BC	I	3.0	$0.333I$	$0.333I/0.333I=k$
CD	$6I$	9.0	$0.667I$	$0.667I/0.333I=2k$

IV) ECUACIONES PENDIENTE-DEFLEXION EN CADA TRAMO

Tramo AB

$$M_{AB} = \overline{M}_{AB} + \frac{2EI}{L}(2\theta_A + \theta_B) = -22.5 + 2E(k)(0 + \theta_B) = -22.5 + 2Ek\theta_B$$

$$M_{BA} = \overline{M}_{BA} + \frac{2EI}{L}(\theta_A + 2\theta_B) = 22.5 + 2E(k)(0 + 2\theta_B) = 22.5 + 4Ek\theta_B$$

Tramo BC

$$M_{BC} = \overline{M}_{BC} + \frac{2EI}{L}(2\theta_B + \theta_C) = 0 + 2E(k)(2\theta_B + \theta_C) = 4Ek\theta_B + 2Ek\theta_C$$

$$M_{CB} = \overline{M}_{CB} + \frac{2EI}{L}(\theta_B + 2\theta_C) = 0 + 2E(k)(\theta_B + 2\theta_C) = 2Ek\theta_B + 4Ek\theta_C$$

Tramo CD

$$M_{CD} = \overline{M}_{CD} + \frac{2EI}{L}(2\theta_C + \theta_D) = -5.06 + 2E(2k)(2\theta_C + \theta_D) = -5.06 + 8Ek\theta_C + 4Ek\theta_D$$

$$M_{DC} = \overline{M}_{DC} + \frac{2EI}{L}(\theta_C + 2\theta_D) = 5.06 + 2E(2k)(\theta_C + 2\theta_D) = 5.06 + 4Ek\theta_C + 8Ek\theta_D$$

V) CONDICIONES DE EQUILIBRIO

Se plantea una condición de equilibrio por cada grado de libertad en la estructura, en la viga se tienen 3 grados de libertad que corresponden a los desplazamientos angulares (ó rotaciones) en los apoyos B, C y D.

La condición de equilibrio en la dirección de los desplazamientos corresponde a una suma de momentos en los apoyos mencionados.

a) En la dirección de θ_B :

$$\sum M_B = 0; M_{BA} + M_{BC} = 0$$

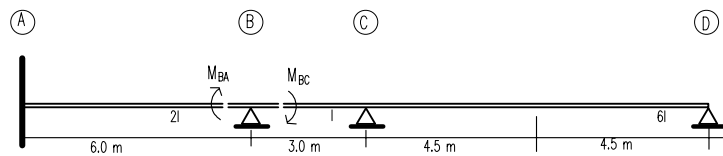


Fig. 1.10 Condición de equilibrio a considerar en la dirección de θ_B

Sumando las expresiones de los momentos en el apoyo B, definidas por las ecuaciones pendiente-deflexión (nótese que se han supuesto positivos los momentos para ser congruentes con el sentido del desplazamiento en este apoyo, el sentido correcto se definirá posteriormente):

$$(22.5 + 4Ek\theta_B) + (4Ek\theta_B + 2Ek\theta_C) = 0$$

$$8Ek\theta_B + 2Ek\theta_C = -22.5 \quad \dots\dots\dots (1)$$

b) En la dirección de θ_C :

$$\sum M_C = 0; M_{CB} + M_{CD} = 0$$

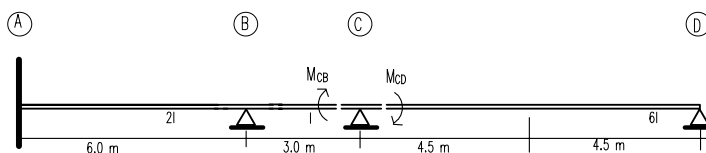


Fig. 1.11 Condición de equilibrio a considerar, en la dirección de θ_C .

Sumando las expresiones de los momentos en el apoyo C, definidas por las ecuaciones pendiente-deflexión (nótese que se han supuesto positivos los momentos para ser congruentes con el sentido del desplazamiento en este apoyo, el sentido correcto se definirá posteriormente):

$$(2Ek\theta_B + 4Ek\theta_C) + (-5.06 + 8Ek\theta_C + 4Ek\theta_D) = 0$$

$$2Ek\theta_B + 12Ek\theta_C + 4Ek\theta_D = 5.06 \quad \dots\dots\dots (2)$$

c) En la dirección de θ_D :

$$\sum M_D = 0; M_{DC} = 0$$

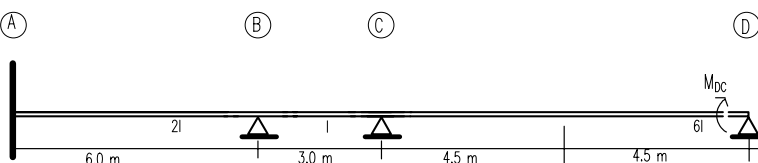


Fig. 1.12 Condición de equilibrio a considerar, en la dirección de θ_D .

Esta condición de equilibrio debe ser congruente con el sentido del desplazamiento en el apoyo D y cumplir con la condición de momentos nulos en apoyos simples.

$$5.06 + 4Ek\theta_C + 8Ek\theta_D = 0$$

$$4Ek\theta_C + 8Ek\theta_D = -5.06 \quad \dots\dots\dots (3)$$

VI) SISTEMA DE ECUACIONES DE LA VIGA.

A partir de las condiciones de equilibrio se genera el sistema de ecuaciones, en el cual las variables corresponden a los desplazamientos de la viga, así resolviendo este sistema de ecuaciones encontramos la magnitud y el sentido de aplicación de los diferentes desplazamientos.

Las ecuaciones mostradas anteriormente, (1), (2) y (3), forman el sistema mencionado:

$$8Ek\theta_B + 2Ek\theta_C = -22.5 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$2Ek\theta_B + 12Ek\theta_C + 4Ek\theta_D = 5.06 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$4Ek\theta_C + 8Ek\theta_D = -5.06 \quad \dots\dots\dots (3)$$

Arreglando términos y expresando el sistema en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 8Ek & 2Ek & 0 \\ 2Ek & 12Ek & 4Ek \\ 0 & 4Ek & 8Ek \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -22.5 \\ 5.06 \\ -5.06 \end{Bmatrix}$$

La representación anterior es de la forma $[K]\{\delta\}=\{F\}$, que es la forma básica del método de rigideces. Nótese que la matriz $[K]$ (matriz de rigidez) es simétrica, lo cual hace que se cumpla con una de las condiciones para que el sistema de ecuaciones tenga solución.

Para resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 2 & 12 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Ek\theta_B \\ Ek\theta_C \\ Ek\theta_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -22.5 \\ 5.06 \\ -5.06 \end{Bmatrix}$$

SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES

$$Ek\theta_B = -3.1603$$

$$Ek\theta_C = 1.3911$$

$$Ek\theta_D = -1.3280$$

Expresando los desplazamientos en términos del coeficiente de rigidez a la flexión EI:

$$EI\theta_B = -9.4809$$

$$EI\theta_C = 4.1733$$

$$EI\theta_D = -3.9840$$

VII) MOMENTOS FLEXIONANTES EN LOS EXTREMOS DE CADA TRAMO

A partir de las ecuaciones pendiente-deflexión definidas para cada tramo y tomando en cuenta los desplazamientos en cada apoyo:

Tramo AB

$$M_{AB} = -22.5 + 2Ek\theta_B = -22.5 + 2(-3.1603) = -28.821 \text{ ton} - \text{m}$$

$$M_{BA} = 22.5 + 4Ek\theta_B = 22.5 + 4(-3.1603) = 9.859 \text{ ton} - \text{m}$$

Tramo BC

$$M_{BC} = 4Ek\theta_B + 2Ek\theta_C = 4(-3.1603) + 2(1.3911) = -9.859 \text{ ton} - \text{m}$$

$$M_{CB} = 2Ek\theta_B + 4Ek\theta_C = 2(-3.1603) + 4(1.3911) = -0.756 \text{ ton} - \text{m}$$

Tramo CD

$$M_{CD} = -5.06 + 8Ek\theta_C + 4Ek\theta_D = -5.06 + 8(1.3911) + 4(-1.328) = 0.757 \text{ ton} - \text{m}$$

$$M_{DC} = 5.06 + 4Ek\theta_C + 8Ek\theta_D = 5.06 + 4(1.3911) + 8(-1.328) = 0.0004 \text{ ton} - \text{m}$$

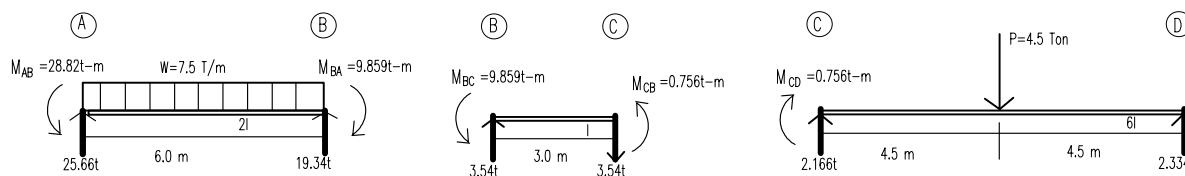


Fig. 1.13 Momentos flexionantes y fuerzas cortantes, en los extremos de cada tramo.

VIII) VERIFICACION DE LAS CONDICIONES DE EQUILIBRIO

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0; M_{BA} + M_{BC} &= 0 \\ 9.859 + (-9.859) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_C = 0; M_{CB} + M_{CD} &= 0 \\ (-0.756) + 0.757 &= 0.001 \end{aligned}$$

$$\sum M_D = 0; M_{DC} = 0$$

DE ESTOS RESULTADOS SE OBSERVA QUE EFECTIVAMENTE, SI SE CUMPLEN LAS CONDICIONES DE EQUILIBRIO.

IX) CONFIGURACION DE DEFORMACION

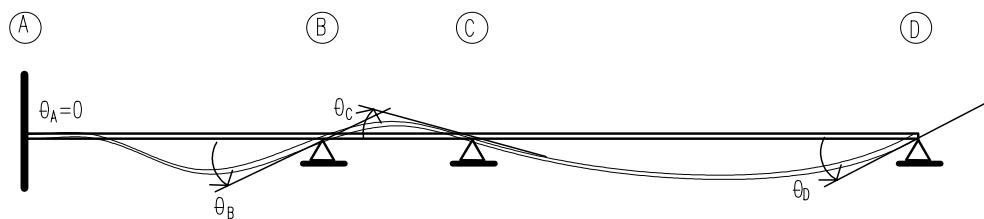


Fig. 1.14 Configuración de deformación de la viga (rotaciones positivas, según la regla de mano derecha)

X) DIAGRAMAS DE FUERZA CORTANTE Y MOMENTOS FLEXIONANTES

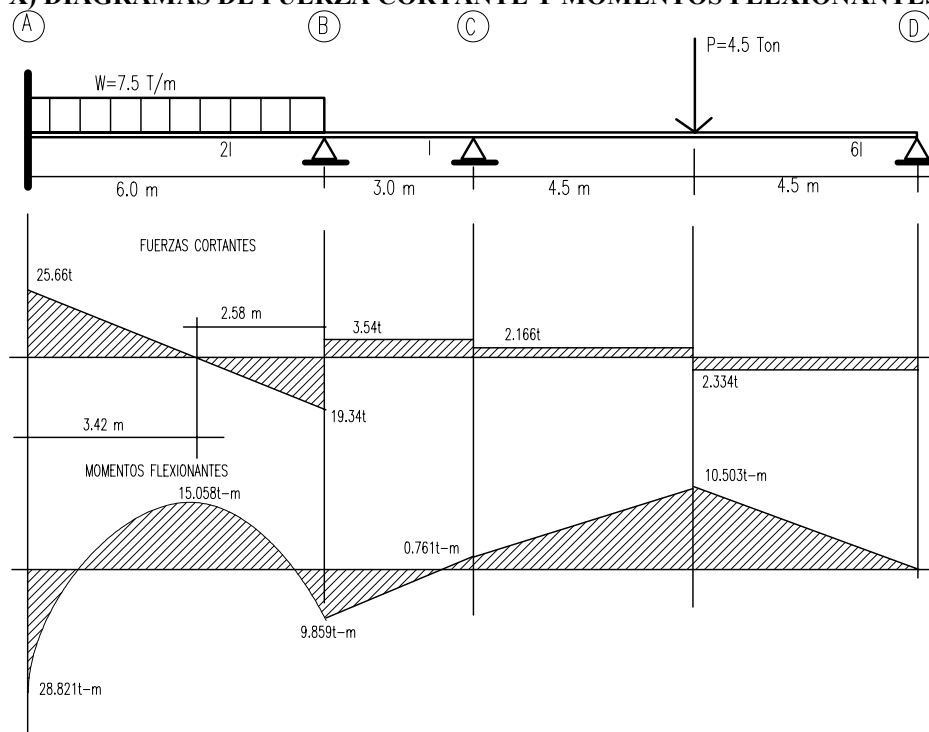
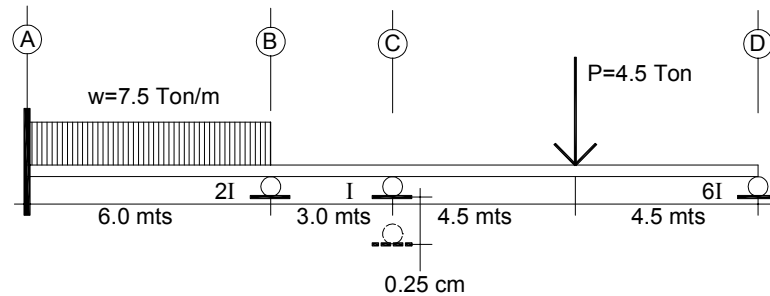


Fig 1.15 Diagramas de fuerza cortantes y momentos flexionantes de la viga del ejercicio 1.1

Ejercicio 1.2

Aplicar el método pendiente-deflexión a la viga del problema anterior, para determinar los elementos mecánicos en los extremos de cada tramo, considerando que en el apoyo en C se presenta un desplazamiento vertical de 0.25 cm hacia abajo. Considerar $I=48,000 \text{ cm}^4$ y $E=2,100 \text{ Ton/cm}^2$.

**SOLUCION****I) CONDICIONES GENERALES DE DEFORMACION**Rotaciones θ :

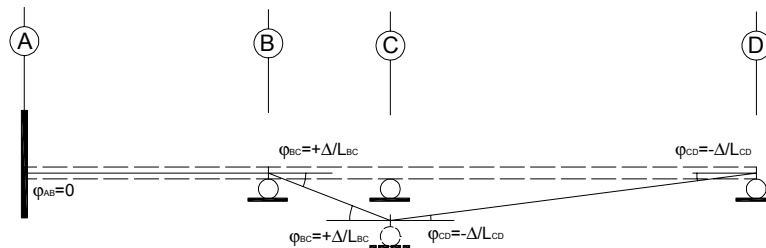
De manera similar al problema anterior y dado que las condiciones de apoyo no se modifican:

En el apoyo "A", $\theta_A = 0$.

En el apoyo "B", $\theta_B \neq 0$.

En el apoyo "C", $\theta_C \neq 0$.

En el apoyo "D", $\theta_D \neq 0$.

Desplazamientos transversales relativos φ :

Tramo AB:

$$\varphi_{AB} = 0$$

Tramo BC:

$$\varphi_{BC} = \frac{\Delta}{L_{BC}} = \frac{0.25}{300} = 0.00083$$

$$\varphi_{CB} = \frac{\Delta}{L_{BC}} = \frac{0.25}{300} = 0.00083$$

Tramo CD:

$$\varphi_{CD} = -\frac{\Delta}{L_{CD}} = -\frac{0.25}{900} = -0.00028$$

$$\varphi_{DC} = -\frac{\Delta}{L_{CD}} = -\frac{0.25}{900} = -0.00028$$

II. MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO.

Del problema anterior:

Tramo AB

$$\overline{M}_{AB} = -22.5 \text{ ton} - \text{m}$$

$$\overline{M}_{BA} = 22.5 \text{ ton} - \text{m}$$

Tramo BC

$$\overline{M}_{BC} = 0$$

$$\overline{M}_{CB} = 0$$

Tramo CD

$$\overline{M}_{CD} = -5.06 \text{ ton} - \text{m}$$

$$\overline{M}_{DC} = 5.06 \text{ ton} - \text{m}$$

III) RIGIDECES RELATIVAS $\left(K = \frac{I}{L}\right)$

Del problema anterior:

Tramo	Rigidez
AB	k
BC	k
CD	2k

IV) ECUACIONES PENDIENTE-DEFLEXION EN CADA TRAMO

Tramo AB

$$M_{AB} = \overline{M}_{AB} + \frac{2EI}{L}(2\theta_A + \theta_B - 3\varphi_{AB}) = -22.5 + 2E(k)(0 + \theta_B + 0) = -22.5 + 2Ek\theta_B$$

$$M_{BA} = \overline{M}_{BA} + \frac{2EI}{L}(\theta_A + 2\theta_B - 3\varphi_{AB}) = 22.5 + 2E(k)(0 + 2\theta_B + 0) = 22.5 + 4Ek\theta_B$$

Tramo BC $Ek = (2100 \text{ Ton/cm}^2)(48000 \text{ cm}^4/300 \text{ cm}) = 336000 \text{ Ton-cm} = 3360 \text{ Ton-m}$

$$M_{BC} = \overline{M}_{BC} + \frac{2EI}{L}(2\theta_B + \theta_C - 3\varphi_{BC}) = 0 + 2E(k)[2\theta_B + \theta_C - 3(0.00083)] = 4Ek\theta_B + 2Ek\theta_C - 16.73$$

$$M_{CB} = \overline{M}_{CB} + \frac{2EI}{L}(\theta_B + 2\theta_C - 3\varphi_{BC}) = 0 + 2E(k)[\theta_B + 2\theta_C - 3(0.00083)] = 2Ek\theta_B + 4Ek\theta_C - 16.73$$

Tramo CD $EK=3360 \text{ Ton-m}$

$$M_{CD} = \overline{M}_{CD} + \frac{2EI}{L}(2\theta_C + \theta_D - 3\phi_{CD}) = -5.06 + 2E(2k)[2\theta_C + \theta_D + 3(0.00028)] = 8Ek\theta_C + 4Ek\theta_D + 6.23$$

$$M_{DC} = \overline{M}_{DC} + \frac{2EI}{L}(\theta_C + 2\theta_D - 3\phi_{CD}) = 5.06 + 2E(2k)[\theta_C + 2\theta_D + 3(0.00028)] = 4Ek\theta_C + 8Ek\theta_D + 16.35$$

V) CONDICIONES DE EQUILIBRIO

De manera similar que en el problema anterior, una condición de equilibrio por cada uno de los posibles desplazamientos, planteando las condiciones de equilibrio en las direcciones de los desplazamientos:

a) En la dirección de θ_B :

$$\sum M_B = 0; M_{BA} + M_{BC} = 0$$

$$(22.5 + 4Ek\theta_B) + (4Ek\theta_B + 2Ek\theta_C - 16.73) = 0$$

$$8Ek\theta_B + 2Ek\theta_C = -5.77 \quad \dots\dots\dots (1)$$

b) En la dirección de θ_C :

$$\sum M_C = 0; M_{CB} + M_{CD} = 0$$

$$(2Ek\theta_B + 4Ek\theta_C - 16.73) + (8Ek\theta_C + 4Ek\theta_D + 6.23) = 0$$

$$2Ek\theta_B + 12Ek\theta_C + 4Ek\theta_D = 10.50 \quad \dots\dots\dots (2)$$

c) En la dirección de θ_D :

$$\sum M_D = 0; M_{DC} = 0$$

$$4Ek\theta_C + 8Ek\theta_D + 16.35 = 0$$

$$4Ek\theta_C + 8Ek\theta_D = -16.35 \quad \dots\dots\dots (3)$$

VI) SISTEMA DE ECUACIONES DE LA VIGA.

Las ecuaciones mostradas anteriormente, (1), (2) y (3), forman el sistema:

$$8Ek\theta_B + 2Ek\theta_C = -5.77 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$2Ek\theta_B + 12Ek\theta_C + 4Ek\theta_D = 10.50 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$4Ek\theta_C + 8Ek\theta_D = -16.35 \quad \dots\dots\dots (3)$$

Arreglando términos y expresando el sistema en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 8Ek & 2Ek & 0 \\ 2Ek & 12Ek & 4Ek \\ 0 & 4Ek & 8Ek \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5.77 \\ 10.50 \\ -16.35 \end{Bmatrix}$$

Para resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 2 & 12 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Ek\theta_B \\ Ek\theta_C \\ Ek\theta_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5.77 \\ 10.50 \\ -16.35 \end{Bmatrix}$$

SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES

$$Ek\theta_B = -1.25$$

$$Ek\theta_C = 2.12$$

$$Ek\theta_D = -3.10$$

Expresando los desplazamientos en términos del coeficiente de rigidez a la flexión EI:

$$EI\theta_B = -3.753$$

$$EI\theta_C = 6.366$$

$$EI\theta_D = -9.309$$

VII) MOMENTOS FLEXIONANTES EN LOS EXTREMOS DE CADA TRAMO

A partir de las ecuaciones pendiente-deflexión definidas para cada tramo y tomando en cuenta los desplazamientos en cada apoyo:

Tramo AB

$$M_{AB} = -22.5 + 2Ek\theta_B = -22.5 + 2(-1.25) = -25.0 \text{ ton} - \text{m}$$

$$M_{BA} = 22.5 + 4Ek\theta_B = 22.5 + 4(-1.25) = 17.5 \text{ ton} - \text{m}$$

Tramo BC

$$M_{BC} = 4Ek\theta_B + 2Ek\theta_C - 16.73 = 4(-1.25) + 2(2.12) - 16.73 = -17.49 \text{ ton} - \text{m}$$

$$M_{CB} = 2Ek\theta_B + 4Ek\theta_C - 16.73 = 2(-1.25) + 4(2.12) - 16.73 = -10.75 \text{ ton}$$

Tramo CD

$$M_{CD} = 8Ek\theta_C + 4Ek\theta_D + 6.23 = 8(2.12) + 4(-3.10) + 6.23 = 10.79 \text{ ton} - \text{m}$$

$$M_{DC} = 4Ek\theta_C + 8Ek\theta_D + 16.35 = 4(2.12) + 8(-3.10) + 16.35 = 0.03 \text{ ton} - \text{m} \cong 0.0$$

VIII) VERIFICACION DE LAS CONDICIONES DE EQUILIBRIO

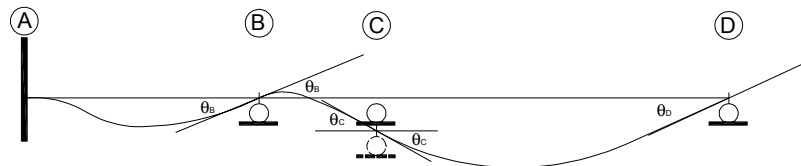
$$\begin{aligned} \sum M_B = 0; M_{BA} + M_{BC} &= 0 \\ 17.5 + (-17.49) &= 0.01 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_C = 0; M_{CB} + M_{CD} &= 0 \\ (-10.75) + 10.79 &= 0.04 \end{aligned}$$

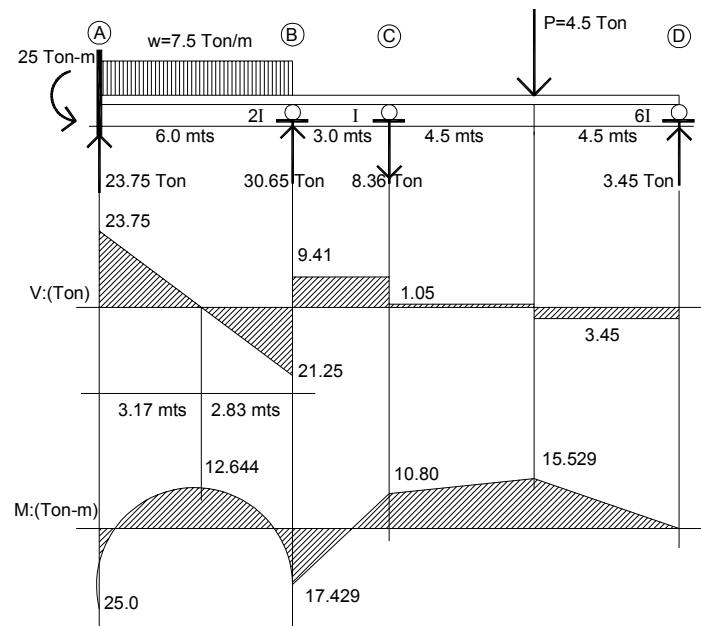
$$\sum M_D = 0; M_{DC} = 0.03$$

DE ESTOS RESULTADOS SE OBSERVA QUE EFECTIVAMENTE, SI SE CUMPLEN LAS CONDICIONES DE EQUILIBRIO.

IX) CONFIGURACION DE DEFORMACION

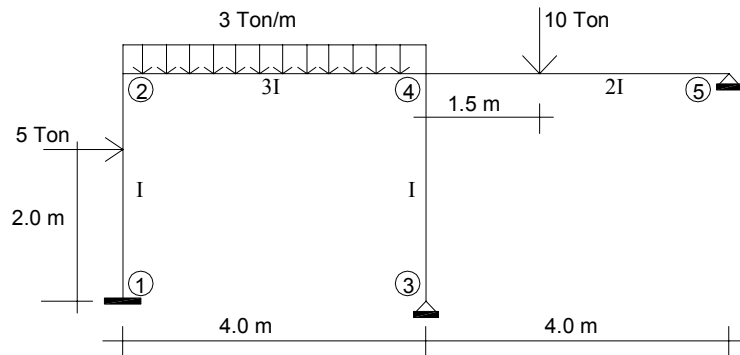


X) DIAGRAMAS DE FUERZA CORTANTE Y MOMENTOS FLEXIONANTES

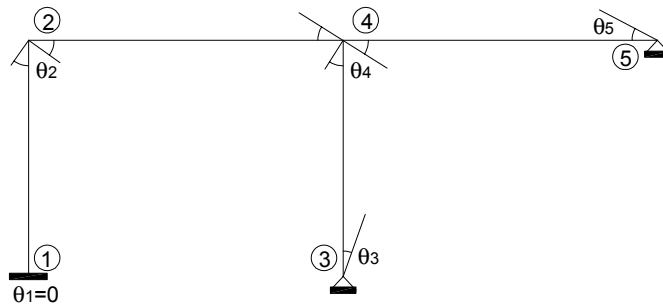


Ejercicio 1.3

Aplicar el método pendiente-deflexión al marco mostrada en la figura, para determinar los elementos mecánicos en los extremos de cada uno de los tramos, así como las rotaciones en los apoyos.

**SOLUCION****I) CONDICIONES GENERALES DE DEFORMACION**

Rotaciones θ :



En el apoyo 1, $\theta_1 = 0$. En el apoyo 3, $\theta_3 \neq 0$. En el nodo 2, $\theta_2 \neq 0$.
En el apoyo 5, $\theta_5 \neq 0$. En el nodo 4, $\theta_4 \neq 0$.

Nótese que los desplazamientos se han supuesto en sentido positivo, el sentido correcto será determinado posteriormente.

Desplazamientos transversales relativos $\Delta(\varphi = \Delta/L)$:

En todas las barras son nulos, debido a que no se presentan tanto desplazamientos verticales como horizontales en los apoyos, por lo que $\varphi = 0$ en cada una de las barras.

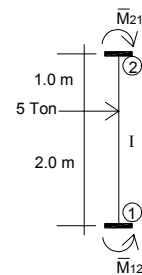
II) MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO.Barra 1-2

Condición de carga:

concentrada fuera del centro del claro

$P = 5.0$ ton, $L = 3.0$ m, $a = 2.0$ m, $b = 1.0$ m.

En el extremo 1, $\bar{M}_{12} = -\frac{Pab^2}{L^2} = -\frac{(5.0)(2.0)(1.0)^2}{(3.0)^2} = -1.11$ ton - m



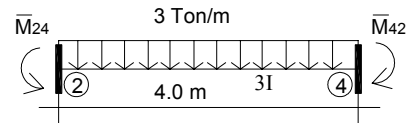
En el extremo 2, $\bar{M}_{21} = \frac{Pa^2b}{L^2} = \frac{(5.0)(2.0)^2(1.0)}{(3.0)^2} = 2.22\text{ton} - \text{m}$

Barra 2-4

Condición de carga:
uniformemente distribuida
 $w=3.0 \text{ ton/m}$, $L=4.0 \text{ m}$

En el extremo 2, $\bar{M}_{24} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{(3.0)(4.0)^2}{12} = -4.0\text{ton} - \text{m}$

En el extremo 4, $\bar{M}_{42} = \frac{wL^2}{12} = \frac{(3.0)(4.0)^2}{12} = 4.0\text{ton} - \text{m}$



Barra 3-4

No hay condición de carga.

En el extremo 3, $\bar{M}_{34} = 0$

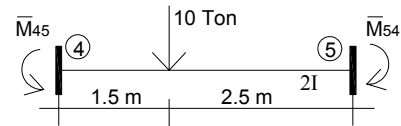
En el extremo 4, $\bar{M}_{43} = 0$

Barra 4-5

Condición de carga:
concentrada fuera del centro del claro
 $P=10.0 \text{ ton}$, $L=4.0 \text{ m}$, $a=1.5 \text{ m}$, $b=2.5 \text{ m}$.

En el extremo 4, $\bar{M}_{45} = -\frac{Pab^2}{L^2} = -\frac{(10.0)(1.5)(2.5)^2}{(4.0)^2} = -5.86\text{ton} - \text{m}$

En el extremo 5, $\bar{M}_{54} = \frac{Pa^2b}{L^2} = \frac{(10.0)(1.5)^2(2.5)}{(4.0)^2} = 3.52\text{ton} - \text{m}$



III) RIGIDECES RELATIVAS $\left(K = \frac{I}{L}\right)$

Tramo	Inercia	Long.	$K=I/L$	Rigidez
1-2	I	3.0	$0.333I$	$0.333I/0.333I=k$
2-4	$3I$	4.0	$0.75I$	$0.75I/0.333I=\frac{9}{4}k$
3-4	I	3.0	$0.333I$	$0.333I/0.333I=k$
4-5	$2I$	4.0	$0.5I$	$0.5I/0.333I=\frac{3}{2}k$

IV) ECUACIONES PENDIENTE-DEFLEXION EN CADA BARRA

Barra 1-2

$$M_{12} = \bar{M}_{12} + \frac{2EI}{L}(2\theta_1 + \theta_2) = -1.11 + 2E(k)(0 + \theta_2) = -1.11 + 2Ek\theta_2$$

$$M_{21} = \bar{M}_{21} + \frac{2EI}{L}(\theta_1 + 2\theta_2) = 2.22 + 2E(k)(0 + 2\theta_2) = 2.22 + 4Ek\theta_2$$

Barra 2-4

$$M_{24} = \bar{M}_{24} + \frac{2EI}{L}(2\theta_2 + \theta_4) = -4.0 + 2E\left(\frac{9}{4}k\right)(2\theta_2 + \theta_4) = -4.0 + 9Ek\theta_2 + \frac{9}{2}Ek\theta_4$$

$$M_{42} = \bar{M}_{42} + \frac{2EI}{L}(\theta_2 + 2\theta_4) = 4.0 + 2E\left(\frac{9}{4}k\right)(\theta_2 + 2\theta_4) = 4.0 + \frac{9}{2}Ek\theta_2 + 9Ek\theta_4$$

Barra 3-4

$$M_{34} = \overline{M}_{34} + \frac{2EI}{L}(2\theta_3 + \theta_4) = 0 + 2E(k)(2\theta_3 + \theta_4) = 4Ek\theta_3 + 2Ek\theta_4$$

$$M_{43} = \overline{M}_{43} + \frac{2EI}{L}(\theta_3 + 2\theta_4) = 0 + 2E(k)(\theta_3 + 2\theta_4) = 2Ek\theta_3 + 4Ek\theta_4$$

Barra 4-5

$$M_{45} = \overline{M}_{45} + \frac{2EI}{L}(2\theta_4 + \theta_5) = -5.86 + 2E\left(\frac{3}{2}k\right)(2\theta_4 + \theta_5) = -5.86 + 6Ek\theta_4 + 3Ek\theta_5$$

$$M_{54} = \overline{M}_{54} + \frac{2EI}{L}(\theta_4 + 2\theta_5) = 3.52 + 2E\left(\frac{3}{2}k\right)(\theta_4 + 2\theta_5) = 3.52 + 3Ek\theta_4 + 6Ek\theta_5$$

V) CONDICIONES DE EQUILIBRIO

Se plantea una condición de equilibrio por cada grado de libertad en la estructura, en el marco se tienen 4 grados de libertad que corresponden a los desplazamientos angulares (ó rotaciones) en los apoyos 1, 3 y 5 y en los nodos 2 y 4.

La condición de equilibrio en la dirección de los desplazamientos corresponde a una suma de momentos en los apoyos y nodos mencionados.

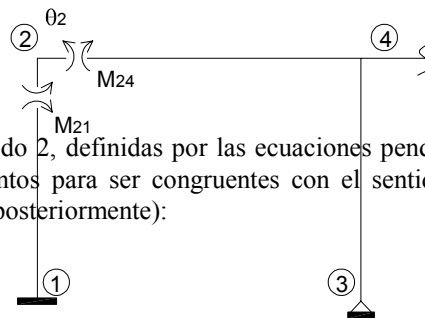
a) En la dirección de θ_2 :

$$\sum M_2 = 0; M_{21} + M_{24} = 0$$

Sumando las expresiones de los momentos en el nodo 2, definidas por las ecuaciones pendiente-deflexión (nótese que se han supuesto positivos los momentos para ser congruentes con el sentido del desplazamiento en este apoyo, el sentido correcto se definirá posteriormente):

$$(2.22 + 4Ek\theta_2) + (-4 + 9Ek\theta_2 + \frac{9}{2}Ek\theta_4) = 0$$

$$13Ek\theta_2 + \frac{9}{2}Ek\theta_4 = 1.78 \quad \dots\dots\dots (1)$$

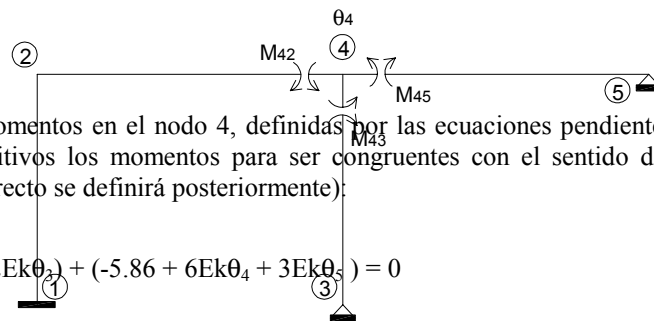
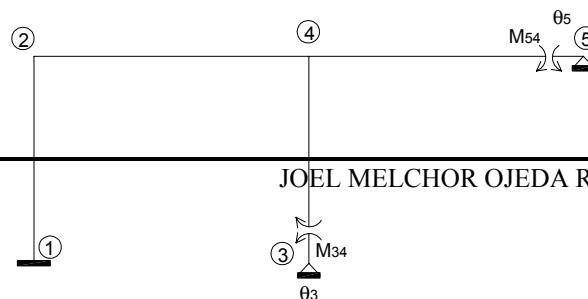
**b) En la dirección de θ_4 :**

$$\sum M_4 = 0; M_{42} + M_{43} + M_{45} = 0$$

Sumando las expresiones de los momentos en el nodo 4, definidas por las ecuaciones pendiente-deflexión (nótese que se han supuesto positivos los momentos para ser congruentes con el sentido del desplazamiento en este apoyo, el sentido correcto se definirá posteriormente):

$$(4 + \frac{9}{2}Ek\theta_2 + 9Ek\theta_4) + (4Ek\theta_4 + 2Ek\theta_3) + (-5.86 + 6Ek\theta_4 + 3Ek\theta_5) = 0$$

$$\frac{9}{2}Ek\theta_2 + 2Ek\theta_3 + 19Ek\theta_4 + 3Ek\theta_5 = 1.86 \quad \dots\dots\dots (2)$$

**c) En la dirección de θ_3 :**

$$\sum M_3 = 0; M_{34} = 0$$

Esta condición de equilibrio debe ser congruente con el sentido del desplazamiento en el apoyo 3 y cumplir con la condición de momentos nulos en apoyos simples.

$$4Ek\theta_3 + 2Ek\theta_4 = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

d) En la dirección de θ_5 :

$$\sum M_5 = 0; M_{54} = 0$$

Esta condición de equilibrio debe ser congruente con el sentido del desplazamiento en el apoyo 5 y cumplir con la condición de momentos nulos en apoyos simples.

$$3Ek\theta_4 + 6Ek\theta_5 = -3.52 \quad \dots\dots\dots (4)$$

VI) SISTEMA DE ECUACIONES DEL MARCO.

A partir de las condiciones de equilibrio se genera el sistema de ecuaciones, en el cual las variables corresponden a los desplazamientos del marco, así resolviendo este sistema de ecuaciones encontramos la magnitud y el sentido de aplicación de los diferentes desplazamientos.

Las ecuaciones mostradas anteriormente, (1), (2), (3) y (4), forman el sistema mencionado:

$$13Ek\theta_2 + \frac{9}{2}Ek\theta_4 = 1.78 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{9}{2}Ek\theta_2 + 2Ek\theta_3 + 19Ek\theta_4 + 3Ek\theta_5 = 1.86 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$4Ek\theta_3 + 2Ek\theta_4 = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$3Ek\theta_4 + 6Ek\theta_5 = -3.52 \quad \dots\dots\dots (4)$$

Arreglando términos y expresando el sistema en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 13Ek & 0 & 4.5Ek & 0 \\ 0 & 4Ek & 2Ek & 0 \\ 4.5Ek & 2Ek & 19Ek & 3Ek \\ 0 & 0 & 3Ek & 6Ek \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.78 \\ 0 \\ 1.86 \\ -3.52 \end{Bmatrix}$$

La representación anterior es de la forma $[K]\{\delta\}=\{F\}$, que es la forma básica del método de rigideces. Nótese que la matriz $[K]$ (matriz de rigidez) es simétrica, lo cual asegura que el sistema de ecuaciones tenga solución.

Para resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 13 & 0 & 4.5 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 4.5 & 2 & 19 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Ek\theta_2 \\ Ek\theta_3 \\ Ek\theta_4 \\ Ek\theta_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.78 \\ 0 \\ 1.86 \\ -3.56 \end{Bmatrix}$$

SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES

$$\begin{aligned}
 Ek\theta_2 &= 0.067 \\
 Ek\theta_3 &= -0.100 \\
 Ek\theta_4 &= 0.200 \\
 Ek\theta_5 &= -0.690
 \end{aligned}$$

Expresando los desplazamientos en términos del coeficiente de rigidez a la flexión EI:

$$\begin{aligned}
 EI\theta_2 &= 0.201 \\
 EI\theta_3 &= -0.300 \\
 EI\theta_4 &= 0.600 \\
 EI\theta_5 &= -2.070
 \end{aligned}$$

VII) MOMENTOS FLEXIONANTES EN LOS EXTREMOS DE CADA BARRA

A partir de las ecuaciones pendiente-deflexión definidas para cada barra y tomando en cuenta los desplazamientos en cada nodo en los extremos:

Barra 1-2

$$M_{12} = -1.11 + 2Ek\theta_2 = -1.11 + 2(0.067) = -0.976 \text{ ton} - \text{m}$$

$$M_{21} = 2.22 + 4Ek\theta_2 = 2.22 + 4(0.067) = 2.488 \text{ ton} - \text{m}$$

Barra 2-4

$$M_{24} = -4.0 + 9Ek\theta_2 + \frac{9}{2}Ek\theta_4 = -4.0 + 9(0.067) + 4.5(0.20) = -2.497 \text{ ton} - \text{m}$$

$$M_{42} = 4.0 + \frac{9}{2}Ek\theta_2 + 9Ek\theta_4 = 4.0 + 4.5(0.067) + 9(0.20) = 6.10 \text{ ton} - \text{m}$$

Barra 3-4

$$M_{34} = 4Ek\theta_3 + 2Ek\theta_4 = 4(-0.10) + 2(0.20) = 0.0 \text{ ton} - \text{m}$$

$$M_{43} = 2Ek\theta_3 + 4Ek\theta_4 = 2(-0.10) + 4(0.20) = 0.60 \text{ ton} - \text{m}$$

Barra 4-5

$$M_{45} = -5.86 + 6Ek\theta_4 + 3Ek\theta_5 = -5.86 + 6(0.20) + 3(-0.69) = -6.73 \text{ ton} - \text{m}$$

$$M_{54} = 3.52 + 3Ek\theta_4 + 6Ek\theta_5 = -3.52 + 3(0.20) + 6(-0.69) = -0.02 \text{ ton} - \text{m}$$

VIII) VERIFICACION DE LAS CONDICIONES DE EQUILIBRIO

$$\begin{aligned}
 \sum M_2 &= 0; M_{21} + M_{24} = 0 \\
 2.488 + (-2.497) &= -0.009
 \end{aligned}$$

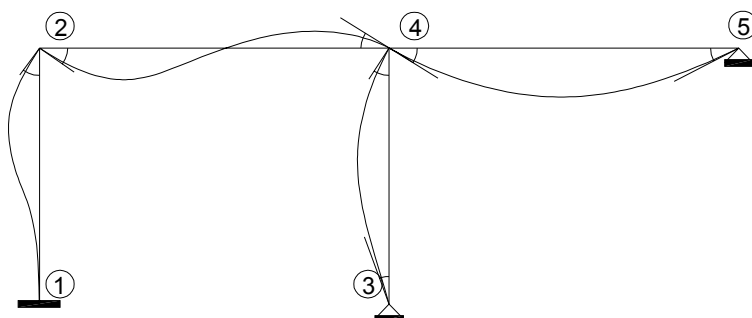
$$\begin{aligned}
 \sum M_4 &= 0; M_{42} + M_{43} + M_{45} = 0 \\
 6.10 + 0.60 + (-6.73) &= -0.03
 \end{aligned}$$

$$\sum M_3 = 0; M_{34} = 0$$

$$\sum M_5 = 0; M_{54} = 0$$

DE ESTOS RESULTADOS SE OBSERVA QUE EFECTIVAMENTE, SI SE CUMPLEN LAS CONDICIONES DE EQUILIBRIO.

IX) CONFIGURACION DE DEFORMACION



X) DIAGRAMAS DE FUERZAS CORTANTES Y MOMENTOS FLEXIONANTES

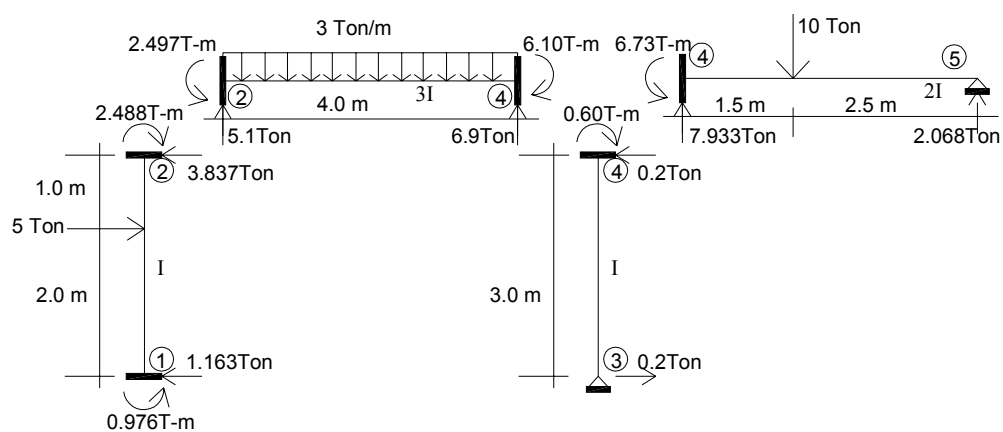


Diagrama de fuerzas cortantes

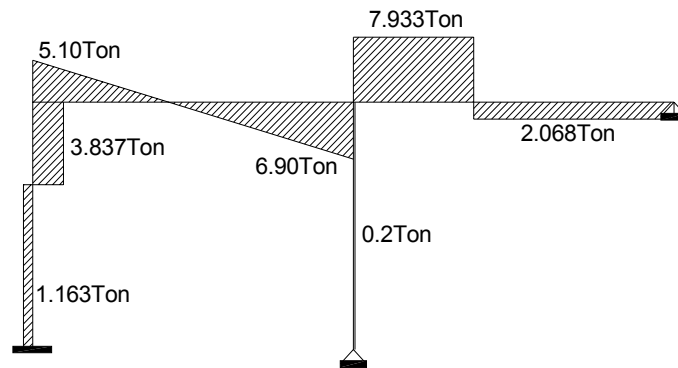


Diagrama de momentos flexionantes

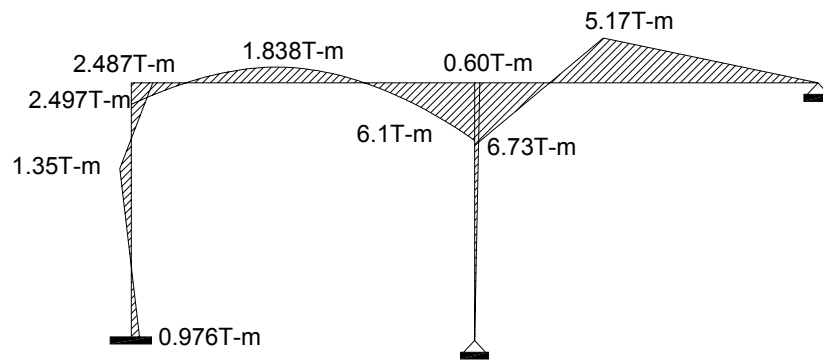
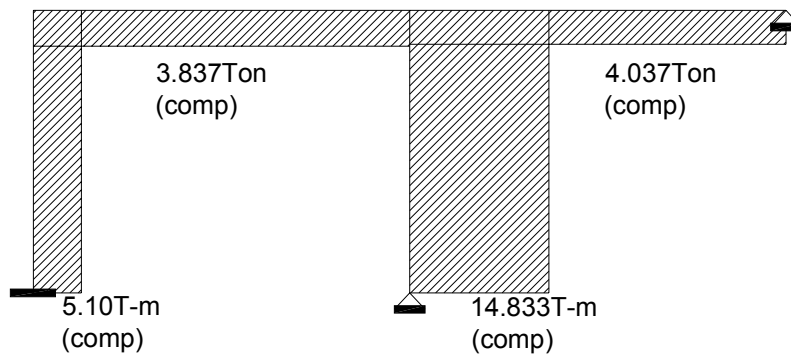
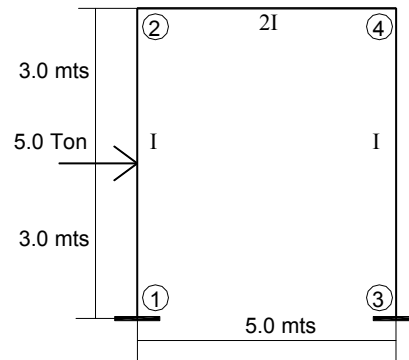


Diagrama de fuerzas axiales

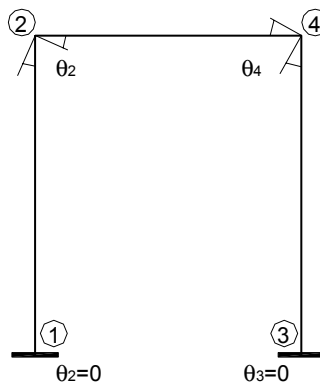


Ejercicio No. 1.4

Aplicar el método pendiente-deflexión al marco mostrada en la figura, para determinar los elementos mecánicos en los extremos de cada uno de las barras, así como los desplazamientos en los nodos.

**SOLUCION****I) CONDICIONES GENERALES DE DEFORMACION**

Rotaciones θ :



En el apoyo 1, $\theta_1 = 0$

En el nodo 2, $\theta_2 \neq 0$.

En el apoyo 3, $\theta_3 = 0$.

En el nodo 4, $\theta_4 \neq 0$.

Nótese que los desplazamientos se han supuesto en sentido positivo, el sentido correcto será determinado posteriormente.

Desplazamientos transversales relativos Δ ($\phi = \Delta/L$):

Dado que la condición de carga no es simétrica, se presentará desplazamiento transversal relativo en los extremos de las columnas. En la viga no se presenta desplazamiento transversal relativo puesto que no se considera acortamiento de las columnas. Se considera también que la viga no tiene alargamiento o acortamiento, lo cual conduce a que el desplazamiento lateral en ambas columnas sea igual.

En la columna 1-2:

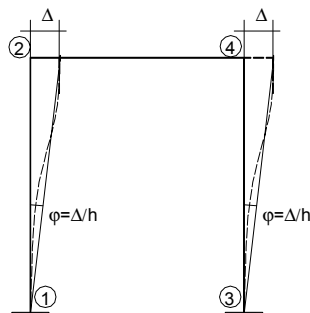
$$\phi_{12} = \frac{\Delta}{L_{12}} = \frac{\Delta}{6.0}$$

En la columna 3-4:

$$\phi_{34} = \frac{\Delta}{L_{34}} = \frac{\Delta}{6.0}$$

De aquí que: $\phi = \phi_{12} = \phi_{34}$

Nótese que los desplazamientos se han supuesto en sentido positivo, el sentido correcto será determinado posteriormente.



II) MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO.

Barra 1-2:

Condición de carga:

Carga concentrada al centro del claro

$P=5.0$ ton, $L=6.0$ m

En el extremo 1: $\bar{M}_{12} = -\frac{(5.0)(6.0)}{8} = -3.75 \text{ ton} \cdot \text{m}$

En el extremo 2: $\bar{M}_{21} = \frac{(5.0)(6.0)}{8} = 3.75 \text{ ton} \cdot \text{m}$

Barra 2-4:

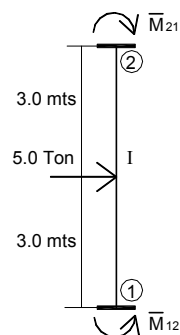
En el extremo 2: $\bar{M}_{24} = 0$

En el extremo 4: $\bar{M}_{42} = 0$

Barra 3-4:

En el extremo 3: $\bar{M}_{34} = 0$

En el extremo 4: $\bar{M}_{43} = 0$



III) RIGIDECES RELATIVAS $\left(K = \frac{I}{L}\right)$

Tramo	Inercia	Long.	$K=I/L$	Rigidez
1-2	I	6.0	$0.167I$	$0.167I=k$
2-4	$2I$	5.0	$0.4I$	$(0.4I)k/0.167I=2.4k$
3-4	I	6.0	$0.167I$	$0.167I=k$

IV) ECUACIONES PENDIENTE-DEFLEXION EN CADA TRAMO

Barra 1-2

$$M_{12} = \bar{M}_{12} + \frac{2EI}{L}(2\theta_1 + \theta_2 - 3\phi_{12}) = -3.75 + 2E(k)(0 + \theta_2 - 3\phi) = -3.75 + 2Ek\theta_2 - 6Ek\phi$$

$$M_{21} = \bar{M}_{21} + \frac{2EI}{L}(\theta_1 + 2\theta_2 - 3\phi_{12}) = 3.75 + 2E(k)(0 + 2\theta_2 - 3\phi) = 3.75 + 4Ek\theta_2 - 6Ek\phi$$

Barra 2-4

$$M_{24} = \bar{M}_{24} + \frac{2EI}{L}(2\theta_2 + \theta_4) = 0 + 2E(2.4k)(2\theta_2 + \theta_4) = 9.6Ek\theta_2 + 4.8Ek\theta_4$$

$$M_{42} = \bar{M}_{42} + \frac{2EI}{L}(\theta_2 + 2\theta_4) = 2E(2.4k)(\theta_2 + 2\theta_4) = 4.8Ek\theta_2 + 9.6Ek\theta_4$$

Barra 3-4

$$M_{34} = \overline{M}_{34} + \frac{2EI}{L}(2\theta_3 + \theta_4 - 3\varphi_{34}) = 0 + 2E(k)(0 + \theta_4 - 3\varphi) = 2Ek\theta_4 - 6Ek\varphi$$

$$M_{43} = \overline{M}_{43} + \frac{2EI}{L}(\theta_3 + 2\theta_4 - 3\varphi_{34}) = 0 + 2E(k)(0 + 2\theta_4 - 3\varphi) = 4Ek\theta_4 - 6Ek\varphi$$

V) CONDICIONES DE EQUILIBRIO

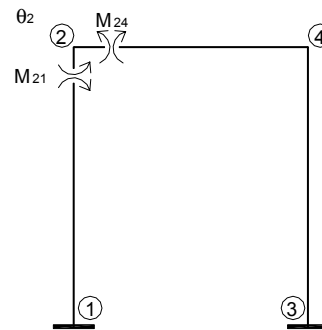
Se plantea una condición de equilibrio por cada grado de libertad en la estructura, en el marco se tienen 3 grados de libertad que corresponden a los desplazamientos angulares (ó rotaciones) en los nodos 2 y 4 y el desplazamiento lateral Δ en los extremos de las columnas.

La condición de equilibrio en la dirección de los desplazamientos corresponde a una suma de momentos en los nodos mencionados.

a) En la dirección de θ_2 :

$$\sum M_2 = 0; M_{21} + M_{24} = 0$$

Sumando las expresiones de los momentos en el nodo 2, definidas por las ecuaciones pendiente-deflexión (nótese que se han supuesto positivos los momentos para ser congruentes con el sentido del desplazamiento en este apoyo, el sentido correcto se definirá posteriormente):



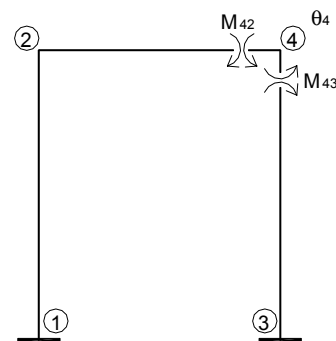
$$(3.75 + 4Ek\theta_2 - 6Ek\varphi) + (9.6Ek\theta_2 + 4.8Ek\theta_4) = 0$$

$$13.6Ek\theta_2 + 4.8Ek\theta_4 - 6Ek\varphi = -3.75 \quad \dots\dots\dots (1)$$

b) En la dirección de θ_4 :

$$\sum M_4 = 0; M_{42} + M_{43} = 0$$

Sumando las expresiones de los momentos en el nodo 4, definidas por las ecuaciones pendiente-deflexión (nótese que se han supuesto positivos los momentos para ser congruentes con el sentido del desplazamiento en este apoyo, el sentido correcto se definirá posteriormente):



$$(4.8Ek\theta_2 + 9.6Ek\theta_4) + (4Ek\theta_4 - 6Ek\varphi) = 0$$

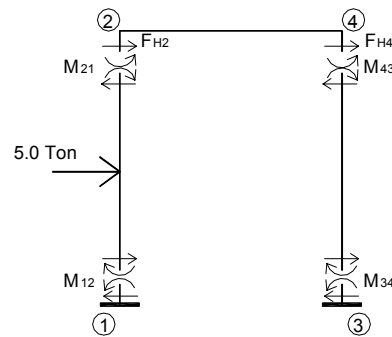
$$4.8Ek\theta_2 + 13.6Ek\theta_4 - 6Ek\varphi = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

c) En la dirección Δ :

La condición de equilibrio asociada al desplazamiento lateral Δ , corresponde a una sumatoria de fuerzas lineales en la dirección del desplazamiento y actuando en el mismo punto que el desplazamiento:

$$\sum F_H = 0; F_{H2} + F_{H4} = 0$$

Las fuerzas en los extremos de las columnas se determinan por equilibrio estático al considerar las cargas actuando sobre el elemento:



Columna 1-2:

$$F_{H2} = 2.5 + \left(\frac{M_{12} + M_{21}}{L_{12}} \right) = 2.5 + \left[\frac{(-3.75 + 2Ek\theta_2 - 6Ek\phi) + (3.75 + 4Ek\theta_2 - 6Ek\phi)}{6.0} \right] = 2.5 + Ek\theta_2 - 2Ek\phi$$

Columna 3-4:

$$F_{H4} = \left(\frac{M_{34} + M_{43}}{L_{34}} \right) = \left[\frac{(2Ek\theta_4 - 6Ek\phi) + (4Ek\theta_4 - 6Ek\phi)}{6.0} \right] = Ek\theta_4 - 2Ek\phi$$

Por lo que la condición de equilibrio planteada será:

$$(2.5 + Ek\theta_2 - 2Ek\phi) + (Ek\theta_4 - 2Ek\phi) = 0$$

$$Ek\theta_2 + Ek\theta_4 - 4Ek\phi = -2.5 \quad (3)$$

VI) SISTEMA DE ECUACIONES DEL MARCO.

A partir de las condiciones de equilibrio se genera el sistema de ecuaciones, en el cual las variables corresponden a los desplazamientos del marco, así resolviendo este sistema de ecuaciones encontramos la magnitud y el sentido de aplicación de los diferentes desplazamientos.

Las ecuaciones mostradas anteriormente, (1), (2) y (3), forman el sistema mencionado:

$$13.6Ek\theta_2 + 4.8Ek\theta_4 - 6Ek\phi = -3.75 \quad (1)$$

$$4.8Ek\theta_2 + 13.6Ek\theta_4 - 6Ek\phi = 0 \quad (2)$$

$$Ek\theta_2 + Ek\theta_4 - 4Ek\phi = -2.5 \quad (3)$$

Arreglando términos y expresando el sistema en forma matricial (la tercer ecuación se multiplicó por -6 para mostrar la forma simétrica de la matriz [K]):

$$\begin{bmatrix} 13.6Ek & 4.8Ek & -6Ek \\ 4.8Ek & 13.6Ek & -6Ek \\ -6Ek & -6Ek & 24Ek \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_4 \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3.75 \\ 0 \\ 15.0 \end{Bmatrix}$$

La representación anterior es de la forma $[K]\{\delta\}=\{F\}$, que es la forma básica del método de rigideces. Nótese que la matriz [K] (matriz de rigidez) es simétrica, lo cual asegura que el sistema de ecuaciones tenga solución.

Para resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 13.6 & 4.8 & -6 \\ 4.8 & 13.6 & -6 \\ -6 & -6 & 24 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Ek\theta_2 \\ Ek\theta_4 \\ Ek\phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3.75 \\ 0 \\ 15.0 \end{Bmatrix}$$

SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES

$$\begin{aligned}Ek\theta_2 &= -0.091 \\Ek\theta_4 &= 0.335 \\Ek\phi &= 0.686\end{aligned}$$

Expresando los desplazamientos en términos del coeficiente de rigidez a la flexión EI:

$$\begin{aligned}EI\theta_2 &= -0.545 \\EI\theta_3 &= 2.006 \\EI\phi &= 4.108\end{aligned}$$

VII) MOMENTOS FLEXIONANTES EN LOS EXTREMOS DE CADA BARRA

A partir de las ecuaciones pendiente-deflexión definidas para cada tramo y tomando en cuenta los desplazamientos en cada nodo:

Tramo 1-2

$$\begin{aligned}M_{12} &= -3.75 + 2Ek\theta_2 - 6Ek\phi = -3.75 + 2(-0.091) - 6(0.686) = -8.048 \text{ ton} - \text{m} \\M_{21} &= +3.75 + 4Ek\theta_2 - 6Ek\phi = 3.75 + 4(-0.091) - 6(0.686) = -0.73 \text{ ton} - \text{m}\end{aligned}$$

Tramo 2-4

$$\begin{aligned}M_{24} &= 9.6Ek\theta_2 + 4.8Ek\theta_4 = 9.6(-0.091) + 4.8(0.335) = 0.734 \text{ ton} - \text{m} \\M_{42} &= 4.8Ek\theta_2 + 9.6Ek\theta_4 = 4.8(-0.091) + 9.6(0.335) = 2.779 \text{ ton} - \text{m}\end{aligned}$$

Tramo 3-4

$$\begin{aligned}M_{34} &= 2Ek\theta_4 - 6Ek\phi = 2(0.335) - 6(0.686) = -3.446 \text{ ton} - \text{m} \\M_{43} &= 4Ek\theta_4 - 6Ek\phi = 4(0.335) - 6(0.686) = -2.776 \text{ ton} - \text{m}\end{aligned}$$

VIII) VERIFICACION DE LAS CONDICIONES DE EQUILIBRIO

$$\begin{aligned}\sum M_2 &= 0; M_{21} + M_{24} = 0 \\(-0.73) + 0.734 &= 0.004\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum M_4 &= 0; M_{42} + M_{43} = 0 \\2.779 + (-2.776) &= 0.003\end{aligned}$$

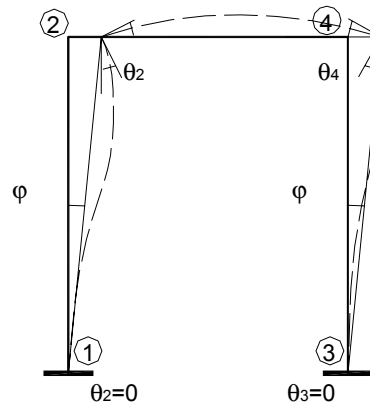
$$\begin{aligned}\sum F_H &= 0; F_{H2} + F_{H4} = 0 \\F_{H2} &= 2.5 + \left(\frac{M_{12} + M_{21}}{L_{12}} \right) = 2.5 + \left[\frac{(-8.048) + (-0.73)}{6.0} \right] = 1.037 \text{ ton} \\F_{H4} &= \left(\frac{M_{34} + M_{43}}{L_{34}} \right) = \left[\frac{(-3.446) + (-2.776)}{6.0} \right] = -1.037 \text{ ton}\end{aligned}$$

por lo que:

$$1.037 - 1.037 \approx 0$$

DE ESTOS RESULTADOS SE OBSERVA QUE EFECTIVAMENTE, SI SE CUMPLEN LAS CONDICIONES DE EQUILIBRIO.

IX) CONFIGURACION DE DEFORMACION



X) DIAGRAMAS DE FUERZAS CORTANTES, MOMENTOS FLEXIONANTES Y FUERZA AXIAL

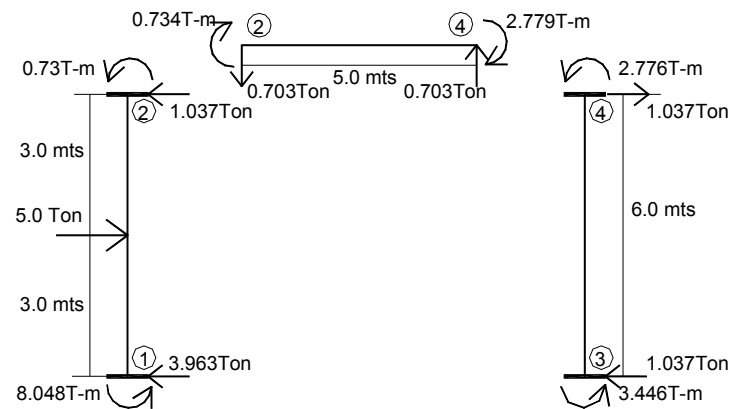


Diagrama de fuerzas cortantes

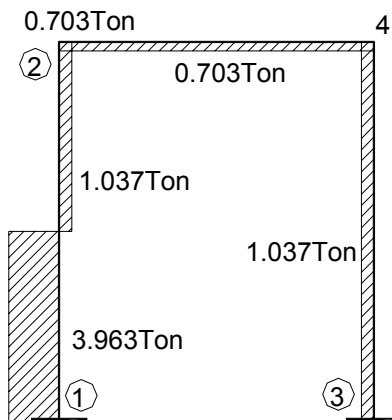
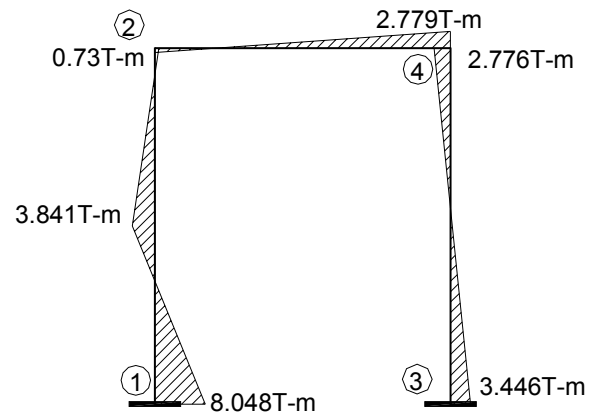
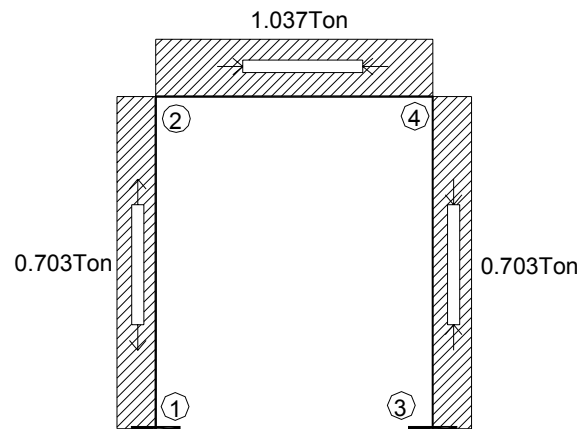
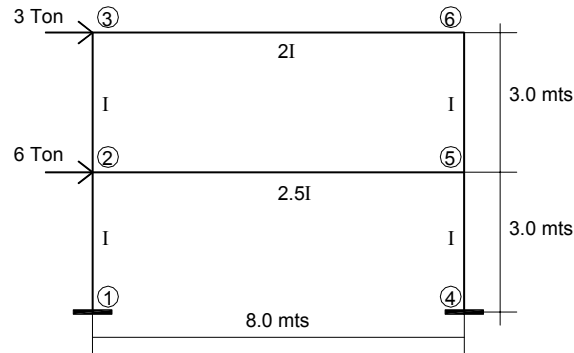


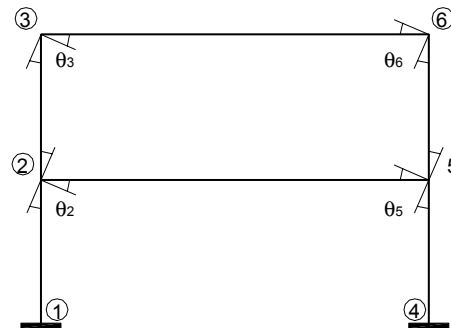
Diagrama de momentos flexionantes**Diagrama de fuerzas axiales**

Ejercicio No. 1.5

Aplicar el método pendiente-deflexión al marco mostrada en la figura, para determinar los elementos mecánicos en los extremos de cada una de las barras, así como los desplazamientos en los nodos.

**SOLUCION****I) CONDICIONES GENERALES DE DEFORMACION****Rotaciones θ :**

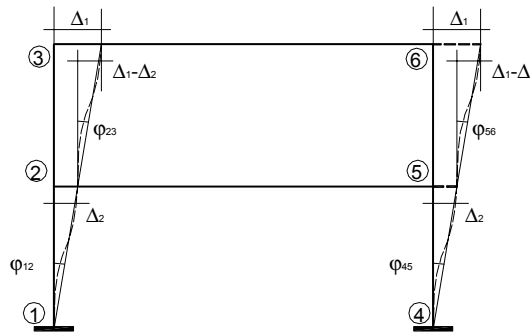
En el apoyo 1, $\theta_1 = 0$ En el nodo 2, $\theta_2 \neq 0$.
 En el apoyo 4, $\theta_4 = 0$ En el nodo 5, $\theta_5 \neq 0$.
 En el nodo 3, $\theta_3 \neq 0$.
 En el nodo 6, $\theta_6 \neq 0$.



Nótese que los desplazamientos se han supuesto en sentido positivo, el sentido correcto será determinado posteriormente.

Desplazamientos transversales relativos Δ ($\phi = \Delta/L$):

El efecto producido por el sistema de cargas aplicado, es el desplazamiento lateral de las columnas. En las vigas no se presentan desplazamientos transversales relativos puesto que no se considera acortamiento en las columnas. Se considera también que las vigas no tiene alargamiento o acortamiento, lo cual conduce a que el desplazamiento lateral en ambas columnas de entrepiso sea igual.



En las columnas del primer nivel, 1-2 y 4-5

$$\phi_{12} = \phi_{45} = \frac{\Delta_2}{L_{12}} = \frac{\Delta_2}{3.0}$$

En las columnas del segundo nivel 2-3 y 5-6, el desplazamiento transversal relativo queda definido por la diferencia de desplazamientos ($\Delta_1 - \Delta_2$):

$$\phi_{23} = \phi_{56} = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{L_{23}} = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{3.0}$$

Nótese que los desplazamientos se han supuesto en sentido positivo, el sentido correcto será determinado posteriormente.

II) MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO.

La condición de carga aplicada al marco no produce momentos de empotramiento en ninguna de las barras:

$$\begin{array}{lll} \text{Barra 1-2:} & \text{Barra 2-3:} & \text{Barra 4-5:} \\ \text{En el extremo 1: } \overline{M}_{12} = 0 & \text{En el extremo 2: } \overline{M}_{23} = 0 & \text{En el extremo 4: } \overline{M}_{45} = 0 \\ \text{En el extremo 2: } \overline{M}_{21} = 0 & \text{En el extremo 3: } \overline{M}_{32} = 0 & \text{En el extremo 5: } \overline{M}_{54} = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{Barra 5-6:} & \text{Barra 2-5:} & \text{Barra 3-6:} \\ \text{En el extremo 5: } \overline{M}_{56} = 0 & \text{En el extremo 2: } \overline{M}_{25} = 0 & \text{En el extremo 3: } \overline{M}_{36} = 0 \\ \text{En el extremo 6: } \overline{M}_{65} = 0 & \text{En el extremo 5: } \overline{M}_{52} = 0 & \text{En el extremo 6: } \overline{M}_{63} = 0 \end{array}$$

III) RIGIDECES RELATIVAS $\left(K = \frac{I}{L}\right)$

Tramo	Inercia	Long.	$K=I/L$	Rigidez
1-2	I	3.0	0.333I	0.333I=k
2-3	I	3.0	0.333I	(0.333I)k/0.333I=k
4-5	I	3.0	0.333I	(0.333I)k/0.333I=k
5-6	I	3.0	0.333I	(0.333I)k/0.333I=k
2-5	2.5I	8.0	0.3125I	(0.3125I)k/0.333I=0.9375k
3-6	2I	8.0	0.25I	(0.25I)k/0.333I=0.75k

IV) ECUACIONES PENDIENTE-DEFLEXION EN CADA BARRA

Barra 1-2

$$\begin{aligned} M_{12} = \overline{M}_{12} + \frac{2EI}{L}(2\theta_1 + \theta_2 - 3\varphi_{12}) &= 0 + 2E(k) \left[0 + \theta_2 - 3\left(\frac{\Delta_2}{3}\right) \right] = 2Ek\theta_2 - 2Ek\Delta_2 \\ M_{21} = \overline{M}_{21} + \frac{2EI}{L}(\theta_1 + 2\theta_2 - 3\varphi_{12}) &= 0 + 2E(k) \left[0 + 2\theta_2 - 3\frac{\Delta_2}{3} \right] = 4Ek\theta_2 - 2Ek\Delta_2 \end{aligned}$$

Barra 2-3

$$\begin{aligned} M_{23} = \overline{M}_{23} + \frac{2EI}{L}(2\theta_2 + \theta_3 - 3\varphi_{23}) &= 0 + 2E(k) \left[2\theta_2 + \theta_3 - 3\left(\frac{\Delta_1 - \Delta_2}{3}\right) \right] = 4Ek\theta_2 + 2Ek\theta_3 - 2Ek\Delta_1 + 2Ek\Delta_2 \\ M_{32} = \overline{M}_{32} + \frac{2EI}{L}(\theta_2 + 2\theta_3 - 3\varphi_{23}) &= 0 + 2E(k) \left[\theta_2 + 2\theta_3 - 3\left(\frac{\Delta_1 - \Delta_2}{3}\right) \right] = 2Ek\theta_2 + 4Ek\theta_3 - 2Ek\Delta_1 + 2Ek\Delta_2 \end{aligned}$$

Barra 4-5

$$\begin{aligned} M_{45} = \overline{M}_{45} + \frac{2EI}{L}(2\theta_4 + \theta_5 - 3\varphi_{45}) &= 0 + 2E(k) \left[0 + \theta_5 - 3\left(\frac{\Delta_2}{3}\right) \right] = 2Ek\theta_5 - 2Ek\Delta_2 \\ M_{54} = \overline{M}_{54} + \frac{2EI}{L}(\theta_4 + 2\theta_5 - 3\varphi_{45}) &= 0 + 2E(k) \left[0 + 2\theta_5 - 3\frac{\Delta_2}{3} \right] = 4Ek\theta_5 - 2Ek\Delta_2 \end{aligned}$$

Barra 5-6

$$M_{56} = \overline{M}_{56} + \frac{2EI}{L}(2\theta_5 + \theta_6 - 3\varphi_{56}) = 0 + 2E(k) \left[2\theta_5 + \theta_6 - 3\left(\frac{\Delta_1 - \Delta_2}{3}\right) \right] = 4Ek\theta_5 + 2Ek\theta_6 - 2Ek\Delta_1 + 2Ek\Delta_2$$

$$M_{65} = \overline{M}_{65} + \frac{2EI}{L}(\theta_5 + 2\theta_6 - 3\varphi_{56}) = 0 + 2E(k) \left[\theta_5 + 2\theta_6 - 3\left(\frac{\Delta_1 - \Delta_2}{3}\right) \right] = 2Ek\theta_5 + 4Ek\theta_6 - 2Ek\Delta_1 + 2Ek\Delta_2$$

Barra 2-5

$$M_{25} = \overline{M}_{25} + \frac{2EI}{L}(2\theta_2 + \theta_5 - 3\varphi_{25}) = 0 + 2E(0.9375k)(2\theta_2 + \theta_5 - 0) = 3.75Ek\theta_2 + 1.875Ek\theta_5$$

$$M_{52} = \overline{M}_{52} + \frac{2EI}{L}(\theta_2 + 2\theta_5 - 3\varphi_{25}) = 0 + 2E(0.9375k)(\theta_2 + 2\theta_5 - 0) = 1.875Ek\theta_2 + 3.75Ek\theta_5$$

Barra 3-6

$$M_{36} = \overline{M}_{36} + \frac{2EI}{L}(2\theta_3 + \theta_6 - 3\varphi_{36}) = 0 + 2E(0.75k)(2\theta_3 + \theta_6 - 0) = 3Ek\theta_3 + 1.5Ek\theta_6$$

$$M_{63} = \overline{M}_{63} + \frac{2EI}{L}(\theta_3 + 2\theta_6 - 3\varphi_{36}) = 0 + 2E(0.75k)(\theta_3 + 2\theta_6 - 0) = 1.5Ek\theta_3 + 3Ek\theta_6$$

V) CONDICIONES DE EQUILIBRIO

Se plantea una condición de equilibrio por cada grado de libertad en la estructura, en el marco se tienen 6 grados de libertad que corresponden a los desplazamientos angulares (ó rotaciones) en los nodos 2, 3, 5 y 6 y los desplazamientos laterales Δ_1 y Δ_2 en los extremos de las columnas del segundo y primer nivel respectivamente.

La condición de equilibrio en la dirección de los desplazamientos corresponde, para el caso de las rotaciones de los nodos, a una suma de momentos en los nodos mencionados y para el caso de los desplazamientos laterales, una sumatoria de fuerzas en la dirección de los desplazamientos, es decir fuerzas horizontales actuando en la estructura en los puntos en donde se presentan tales desplazamientos laterales.

a) En la dirección de θ_2 :

$$\sum M_2 = 0; M_{21} + M_{23} + M_{25} = 0$$

Sumando las expresiones de los momentos en el nodo 2, definidas por las ecuaciones pendiente-deflexión (nótese que se han supuesto positivos los momentos para ser congruentes con el sentido del desplazamiento en este apoyo, el sentido correcto se definirá posteriormente):

$$(4Ek\theta_2 - 2Ek\Delta_2) + (4Ek\theta_2 + 2Ek\theta_3 - 2Ek\Delta_1 + 2Ek\Delta_2) + (3.75Ek\theta_2 + 1.875Ek\theta_5) = 0$$

$$11.75Ek\theta_2 + 2Ek\theta_3 + 1.875Ek\theta_5 - 2Ek\Delta_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

b) En la dirección de θ_3 :

$$\sum M_3 = 0; M_{32} + M_{36} = 0$$

Sumando las expresiones de los momentos en el nodo 3, definidas por las ecuaciones pendiente-deflexión (nótese que se han supuesto positivos los momentos para ser congruentes con el sentido del desplazamiento en este apoyo, el sentido correcto se definirá posteriormente):

$$(2Ek\theta_2 + 4Ek\theta_3 - 2Ek\Delta_1 + 2Ek\Delta_2) + (3Ek\theta_3 + 1.5Ek\theta_6) = 0$$

$$2Ek\theta_2 + 7Ek\theta_3 + 1.5Ek\theta_6 - 2Ek\Delta_1 + 2Ek\Delta_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

c) En la dirección θ_5 :

$$\sum M_5 = 0; M_{52} + M_{54} + M_{56} = 0$$

Sumando las expresiones de los momentos en el nodo 5, definidas por las ecuaciones pendiente-deflexión (nótese que se han supuesto positivos los momentos para ser congruentes con el sentido del desplazamiento en este apoyo, el sentido correcto se definirá posteriormente):

$$(1.875Ek\theta_2 + 3.75Ek\theta_5) + (4Ek\theta_5 - 2Ek\Delta_2) + (4Ek\theta_5 + 2Ek\theta_6 - 2Ek\Delta_1 + 2Ek\Delta_2) = 0$$

$$1.875Ek\theta_2 + 11.75Ek\theta_5 + 2Ek\theta_6 - 2Ek\Delta_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

d) En la dirección de θ_6 :

$$\sum M_6 = 0; M_{63} + M_{65} = 0$$

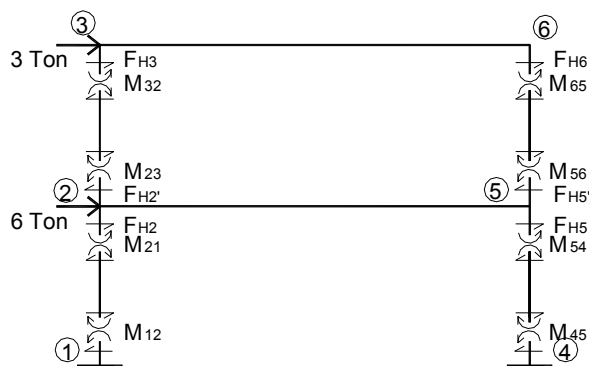
Sumando las expresiones de los momentos en el nodo 6, definidas por las ecuaciones pendiente-deflexión (nótese que se han supuesto positivos los momentos para ser congruentes con el sentido del desplazamiento en este apoyo, el sentido correcto se definirá posteriormente):

$$(1.5Ek\theta_3 + 3Ek\theta_6) + (2Ek\theta_5 + 4Ek\theta_6 - 2Ek\Delta_1 + 2Ek\Delta_2) = 0$$

$$1.5Ek\theta_3 + 2Ek\theta_5 + 7Ek\theta_6 - 2Ek\Delta_1 + 2Ek\Delta_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

e) En la dirección de Δ_1 :

La condición de equilibrio asociada a los desplazamientos laterales Δ_1 y Δ_2 , corresponde a una sumatoria de fuerzas lineales en la dirección de los desplazamientos y actuando en los mismos puntos que los desplazamientos laterales:



$$\sum F_H = 0; F_{H3} + F_{H6} + 3.0 = 0$$

La carga de 3.0 ton, corresponde a la fuerza externa en el nodo.

Las fuerzas en los extremos de las columnas se determinan por equilibrio estático al considerar las cargas actuando sobre el elemento:

Columna 2-3:

$$F_{H3} = \left(\frac{M_{23} + M_{32}}{L_{23}} \right) = \left[\frac{(4Ek\theta_2 + 2Ek\theta_3 - 2Ek\Delta_1 + 2Ek\Delta_2) + (2Ek\theta_2 + 4Ek\theta_3 - 2Ek\Delta_1 + 2Ek\Delta_2)}{3.0} \right]$$

$$F_{H3} = 2Ek\theta_2 + 2Ek\theta_3 - 1.333Ek\Delta_1 + 1.333Ek\Delta_2$$

Columna 5-6:

$$F_{H6} = \left(\frac{M_{56} + M_{65}}{L_{56}} \right) = \left[\frac{(4Ek\theta_5 + 2Ek\theta_6 - 2Ek\Delta_1 + 2Ek\Delta_2) + (2Ek\theta_5 + 4Ek\theta_6 - 2Ek\Delta_1 + 2Ek\Delta_2)}{3.0} \right]$$

$$F_{H6} = 2Ek\theta_5 + 2Ek\theta_6 - 1.333Ek\Delta_1 + 1.333Ek\Delta_2$$

Por lo que la condición de equilibrio planteada será:

$$(2Ek\theta_2 + 2Ek\theta_3 - 1.333Ek\Delta_1 + 1.333Ek\Delta_2) + (2Ek\theta_5 + 2Ek\theta_6 - 1.333Ek\Delta_1 + 1.333Ek\Delta_2) + 3.0 = 0$$

$$2Ek\theta_2 + 2Ek\theta_3 + 2Ek\theta_5 + 2Ek\theta_6 - 2.667Ek\Delta_1 + 2.667Ek\Delta_2 = -3.0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

f) En la dirección de Δ_2 :

La condición de equilibrio asociada al desplazamiento lateral Δ_2 , corresponde a una sumatoria de fuerzas lineales en la dirección del desplazamiento y actuando en el mismo punto que el desplazamiento:

$$\sum F_H = 0; F_{H2} + F_{H5} - (F_{H2'} + F_{H5'}) + 6.0 = 0$$

La carga de 6.0 ton, corresponde a la fuerza externa en el nodo.

Las fuerzas en los extremos de las columnas se determinan por equilibrio estático al considerar las cargas actuando sobre el elemento:

Las fuerzas $F_{H2'}$ y $F_{H5'}$ corresponden a las fuerzas ya calculadas en las columnas del segundo nivel, por lo que la suma $(F_{H2'} + F_{H5'})$ será muy similar a la expresión 5:

$$(F_{H2'} + F_{H5'}) = 2Ek\theta_2 + 2Ek\theta_3 + 2Ek\theta_5 + 2Ek\theta_6 - 2.667Ek\Delta_1 + 2.667Ek\Delta_2$$

Columna 1-2:

$$F_{H2} = \left(\frac{M_{12} + M_{21}}{L_{12}} \right) = \left[\frac{(2Ek\theta_2 - 2Ek\Delta_2) + (4Ek\theta_2 - 2Ek\Delta_2)}{3.0} \right] = 2Ek\theta_2 - 1.333Ek\Delta_2$$

Columna 4-5:

$$F_{H5} = \left(\frac{M_{45} + M_{54}}{L_{45}} \right) = \left[\frac{(2Ek\theta_5 - 2Ek\Delta_2) + (4Ek\theta_5 - 2Ek\Delta_2)}{3.0} \right] = 2Ek\theta_5 - 1.333Ek\Delta_2$$

Por lo que la condición de equilibrio planteada será:

$$(2Ek\theta_2 - 1.333Ek\Delta_2) + (2Ek\theta_5 - 1.333Ek\Delta_2) - (2Ek\theta_2 + 2Ek\theta_3 + 2Ek\theta_5 + 2Ek\theta_6 - 2.667Ek\Delta_1 + 2.667Ek\Delta_2) + 6 = 0$$

$$-2Ek\theta_3 - 2Ek\theta_6 + 2.667Ek\Delta_1 - 5.333Ek\Delta_2 = -6.0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

VI) SISTEMA DE ECUACIONES DEL MARCO.

A partir de las condiciones de equilibrio se genera el sistema de ecuaciones, en el cual las variables corresponden a los desplazamientos del marco, así resolviendo este sistema de ecuaciones encontramos la magnitud y el sentido de aplicación de los diferentes desplazamientos.

Las ecuaciones mostradas anteriormente, (1), (2), (3), (4), (5) y (6), forman el sistema mencionado:

$$11.75Ek\theta_2 + 2Ek\theta_3 + 1.875Ek\theta_5 - 2Ek\Delta_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$2Ek\theta_2 + 7Ek\theta_3 + 1.5Ek\theta_6 - 2Ek\Delta_1 + 2Ek\Delta_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$1.875Ek\theta_2 + 11.75Ek\theta_5 + 2Ek\theta_6 - 2Ek\Delta_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$1.5Ek\theta_3 + 2Ek\theta_5 + 7Ek\theta_6 - 2Ek\Delta_1 + 2Ek\Delta_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$2Ek\theta_2 + 2Ek\theta_3 + 2Ek\theta_5 + 2Ek\theta_6 - 2.667Ek\Delta_1 + 2.667Ek\Delta_2 = -3.0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$-2Ek\theta_3 - 2Ek\theta_6 - 2Ek\theta_6 + 2.667Ek\Delta_1 - 5.333Ek\Delta_2 = -6.0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

Arreglando términos y expresando el sistema en forma matricial (la tercer ecuación se multiplicó por -1 para mostrar la forma simétrica de la matriz [K]):

$$\begin{bmatrix} 11.75Ek & 2Ek & 1.875Ek & 0 & -2Ek & 0 \\ 2Ek & 7Ek & 0 & 1.5Ek & -2Ek & 2Ek \\ 1.875Ek & 0 & 11.75Ek & 2Ek & -2Ek & 0 \\ 0 & 1.5Ek & 2Ek & 7Ek & -2Ek & 2Ek \\ -2Ek & -2Ek & -2Ek & -2Ek & 2.667Ek & -2.667Ek \\ 0 & 2Ek & 0 & 2Ek & -2.667Ek & 5.333Ek \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3.0 \\ 6.0 \end{Bmatrix}$$

La representación anterior es de la forma $[K]\{\delta\}=\{F\}$, que es la forma básica del método de rigideces. Nótese que la matriz [K] (matriz de rigidez) es simétrica, lo cual asegura que el sistema de ecuaciones tenga solución.

Para resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 11.75 & 2 & 1.875 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1.5 & -2 & 2 \\ 1.875 & 0 & 11.75 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1.5 & 2 & 7 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 2.667 & -2.667 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -2.667 & 5.333 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Ek\theta_2 \\ Ek\theta_3 \\ Ek\theta_5 \\ Ek\theta_6 \\ Ek\Delta_1 \\ Ek\Delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3.0 \\ 6.0 \end{Bmatrix}$$

SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES

$$Ek\theta_2 = 1.264$$

$$Ek\theta_3 = 0.639$$

$$Ek\theta_5 = 1.264$$

$$Ek\theta_6 = 0.639$$

$$Ek\Delta_1 = 9.251$$

$$Ek\Delta_2 = 5.271$$

Expresando los desplazamientos en términos del coeficiente de rigidez a la flexión EI:

$$EI\theta_2 = 3.805$$

$$EI\theta_3 = 1.919$$

$$EI\theta_5 = 3.796$$

$$EI\theta_6 = 1.919$$

$$EI\Delta_1 = 27.781$$

$$EI\Delta_2 = 15.829$$

VII) MOMENTOS FLEXIONANTES EN LOS EXTREMOS DE CADA TRAMO

A partir de las ecuaciones pendiente-deflexión definidas para cada tramo y tomando en cuenta los desplazamientos en cada apoyo:

Tramo 1-2

$$M_{12} = 2Ek\theta_2 - 2Ek\Delta_2 = 2(1.264) - 2(5.271) = -8.014 \text{ ton} - \text{m}$$

$$M_{21} = 4Ek\theta_B - 2Ek\Delta_2 = 4(1.264) - 2(5.271) = -5.486 \text{ ton} - \text{m}$$

Tramo 2-3

$$M_{23} = 4Ek\theta_2 + 2Ek\theta_3 - 2Ek\Delta_1 + 2Ek\Delta_2 = 4(1.264) + 2(0.639) - 2(9.251) + 2(5.271) = -1.626 \text{ ton} - \text{m}$$

$$M_{32} = 2Ek\theta_2 + 4Ek\theta_3 - 2Ek\Delta_1 + 2Ek\Delta_2 = 2(1.264) + 4(0.639) - 2(9.251) + 2(5.271) = -2.876 \text{ ton} - \text{m}$$

Tramo 4-5

$$M_{45} = 2Ek\theta_5 - 2Ek\Delta_2 = 2(1.264) - 2(5.271) = -8.014 \text{ ton} - \text{m}$$

$$M_{54} = 4Ek\theta_5 - 2Ek\Delta_2 = 4(1.264) - 2(5.271) = -5.486 \text{ ton} - \text{m}$$

Tramo 5-6

$$M_{56} = 4Ek\theta_5 + 2Ek\theta_6 - 2Ek\Delta_1 + 2Ek\Delta_2 = 4(1.264) + 2(0.639) - 2(9.251) + 2(5.271) = -1.626 \text{ ton} - \text{m}$$

$$M_{65} = 2Ek\theta_5 + 4Ek\theta_6 - 2Ek\Delta_1 + 2Ek\Delta_2 = 2(1.264) + 4(0.639) - 2(9.251) + 2(5.271) = -2.876 \text{ ton} - \text{m}$$

Tramo 2-5

$$M_{25} = 3.75Ek\theta_2 + 1.875Ek\theta_5 = 3.75(1.264) + 1.875(1.264) = 7.11 \text{ ton} - \text{m}$$

$$M_{52} = 1.875Ek\theta_2 + 3.75Ek\theta_5 = 1.875(1.264) + 3.75(1.264) = 7.11 \text{ ton} - \text{m}$$

Tramo 3-6

$$M_{36} = 3Ek\theta_3 + 1.5Ek\theta_6 = 3(0.639) + 1.5(0.639) = 2.876 \text{ ton} - \text{m}$$

$$M_{63} = 1.5Ek\theta_3 + 3Ek\theta_6 = 1.5(0.639) + 3(0.639) = 2.876 \text{ ton} - \text{m}$$

VIII) VERIFICACION DE LAS CONDICIONES DE EQUILIBRIO

$$\begin{aligned} \sum M_2 &= 0; M_{21} + M_{23} + M_{25} = 0 \\ &(-5.486) + (-1.626) + 7.11 = -0.002 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_3 &= 0; M_{32} + M_{36} = 0 \\ &(-2.876) + 2.876 = 0.0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_5 &= 0; M_{52} + M_{54} + M_{56} = 0 \\ &7.11 + (-5.486) + (-1.626) = -0.002 \end{aligned}$$

$$\sum M_6 = 0; M_{63} + M_{65} = 0$$

$$2.876 + (-2.876) = 0.0$$

$$\sum F_H = 0; F_{H3} + F_{H6} + 3.0 = 0$$

$$F_{H3} = \left(\frac{M_{23} + M_{32}}{L_{23}} \right) = \left[\frac{(-1.626) + (-2.876)}{3.0} \right] = -1.5 \text{ ton}$$

$$F_{H6} = \left(\frac{M_{56} + M_{65}}{L_{56}} \right) = \left[\frac{(-1.626) + (-2.876)}{3.0} \right] = -1.5 \text{ ton}$$

por lo que:

$$(-1.5) + (-1.5) + 3.0 = 0.0$$

$$\sum F_H = 0; F_{H2} + F_{H5} - (F_{H2'} + F_{H5'}) + 6.0 = 0$$

$$F_{H2} = \left(\frac{M_{12} + M_{21}}{L_{12}} \right) = \left[\frac{(-8.014) + (-5.486)}{3.0} \right] = -4.5$$

$$F_{H5} = \left(\frac{M_{45} + M_{54}}{L_{45}} \right) = \left[\frac{(-8.014) + (-5.486)}{3.0} \right] = -4.5$$

$$F_{H2'} = F_{H3}$$

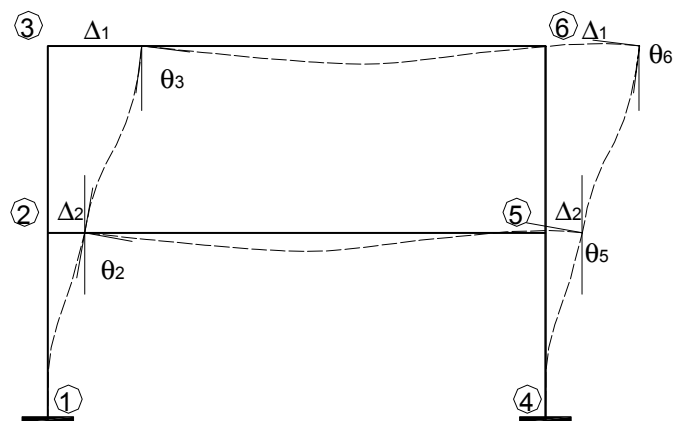
$$F_{H5'} = F_{H6}$$

por lo que

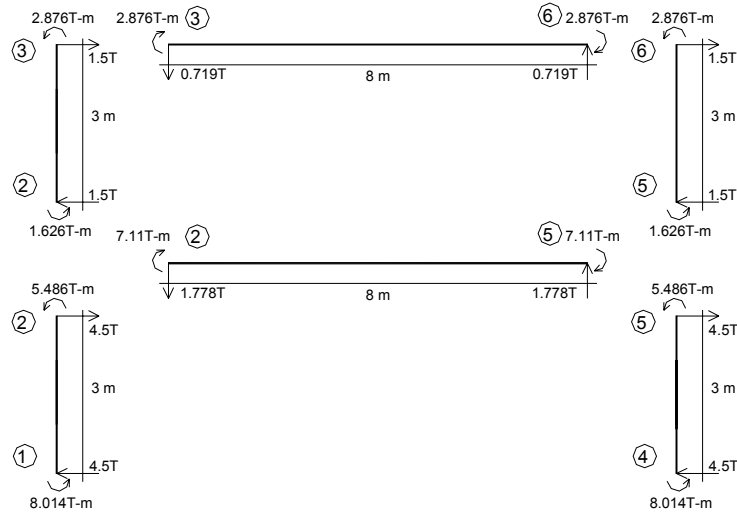
$$(-4.5) + (-4.5) - [(-1.5) + (-1.5)] + 6.0 = 0.0$$

DE ESTOS RESULTADOS SE OBSERVA QUE EFECTIVAMENTE, SI SE CUMPLEN LAS CONDICIONES DE EQUILIBRIO.

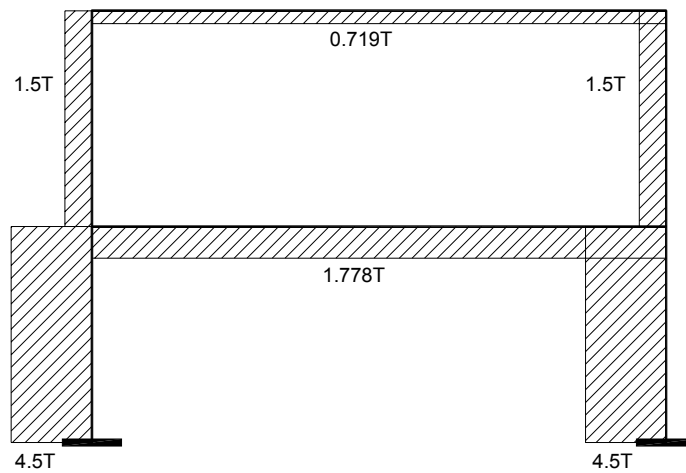
IX) CONFIGURACION DE DEFORMACION



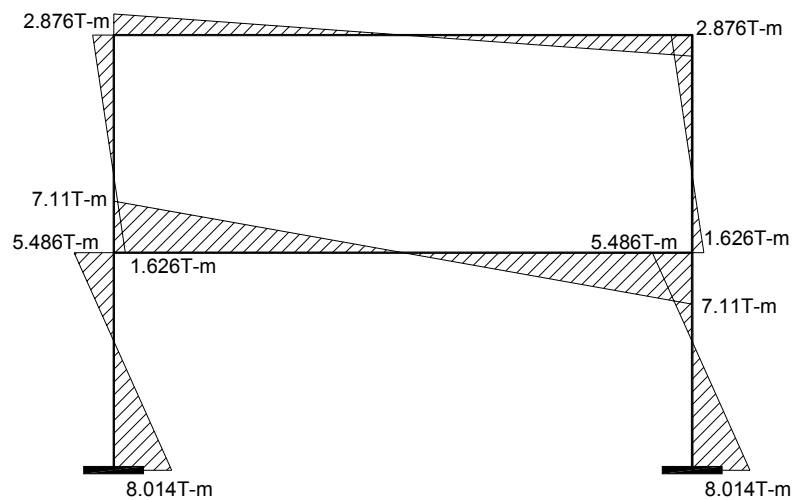
X) DIAGRAMAS DE FUERZAS CORTANTES, MOMENTOS FLEXIONANTES Y FUERZAS AXIALES

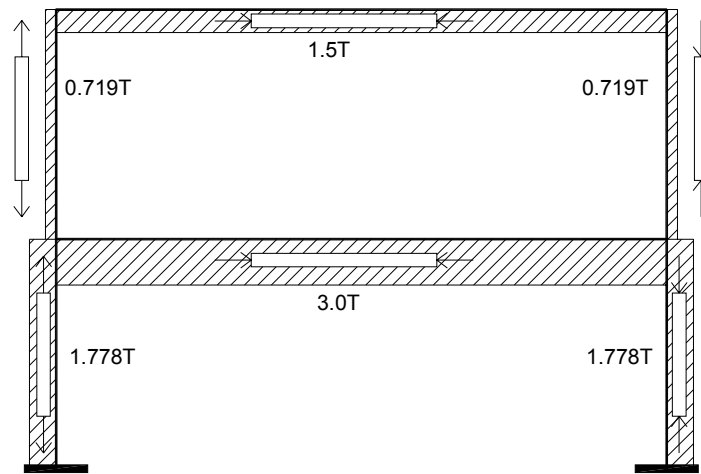


Diagramas de fuerzas cortantes



Diagramas de momentos flexionantes



Diagramas de fuerzas axiales

ANÁLISIS DE MARCOS RÍGIDOS CON ELEMENTOS INCLINADOS

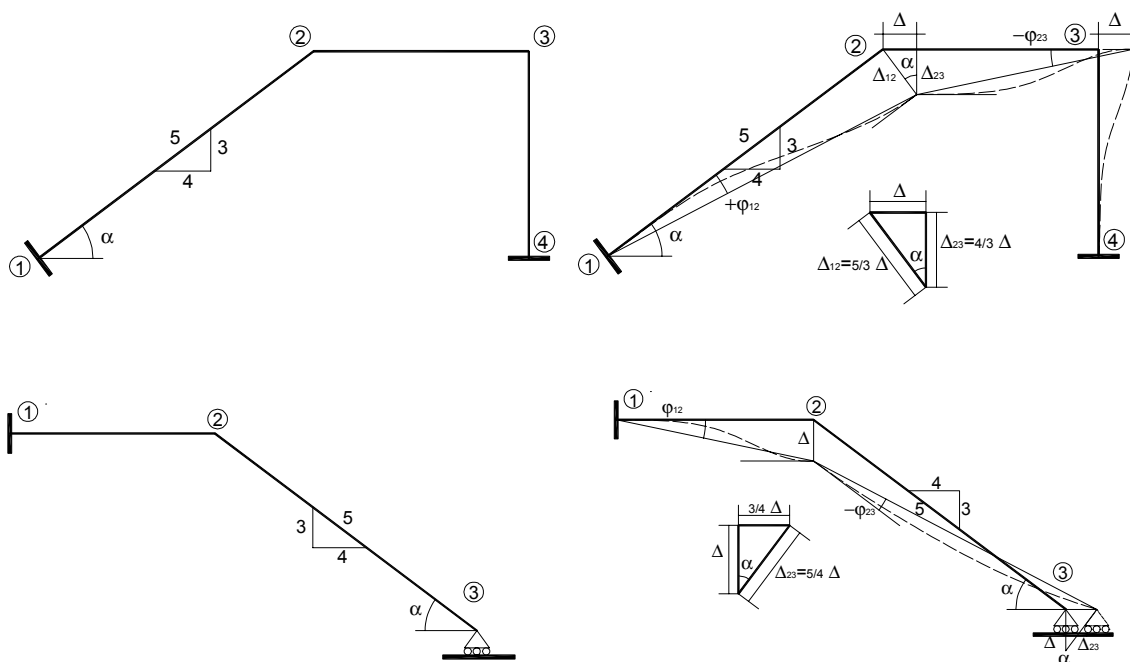
En la aplicación del método Pendiente-Deflexión al análisis de marcos rígidos en los que algunos de los elementos estructurales se encuentran inclinados, es decir, la orientación del eje longitudinal no es del todo vertical ni horizontal, la determinación de las rotaciones de los nodos, se lleva a cabo de la manera como se ha mostrado anteriormente, sin embargo cuando los marcos con este tipo de elementos presentan desplazamientos tanto verticales como horizontales en los extremos de los elementos inclinados, será necesario determinar los desplazamientos transversales relativos entre los extremos del elemento, es decir, desplazamientos perpendiculares al eje longitudinal del elemento inclinado. Dado el ángulo de inclinación del eje longitudinal de estos elementos, estos desplazamientos transversales relativos, no coinciden con los desplazamientos horizontales o verticales en los nodos del marco, siendo éstos últimos los desplazamientos considerados en el sistema de ecuaciones a resolver, por lo que será necesario determinar las componentes horizontales y verticales de los desplazamientos transversales relativos.

La determinación de la relación de las componentes horizontal y vertical de desplazamiento de los extremos de los elementos inclinados en el marco de lleva a cabo mediante la definición de el *diagrama de deformaciones*. Este diagrama de deformaciones constituye una relación geométrica de los desplazamientos transversales relativos de los elementos inclinados, con las componentes horizontal y vertical de los nodos en los extremos de las barras inclinadas, los cuales presentan la posibilidad de desplazamiento.

En la determinación de el diagrama de deformaciones, se deberá observar lo siguiente:

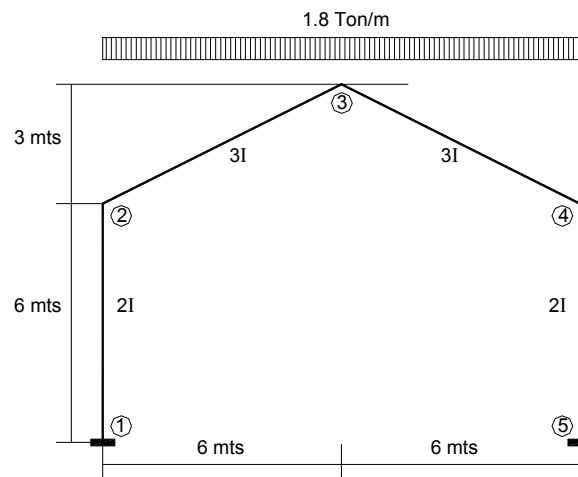
- No se permite que las juntas giren.
- El ángulo entre los elementos que se conectan en el nodo, permanece sin cambios.
- Los elementos no presentan cambios en su longitud inicial por efectos axiales, es decir, no se presenta acortamiento ni alargamiento.
- La distancia entre los extremos de los elementos no decrece debido a la curvatura del elemento.
- Los extremos de los elementos sólo pueden trasladarse en dirección perpendicular al eje de el elemento.

En los siguiente marcos rígidos con elementos inclinados, se muestra la aplicación del procedimiento para determinar el diagrama de deformaciones.

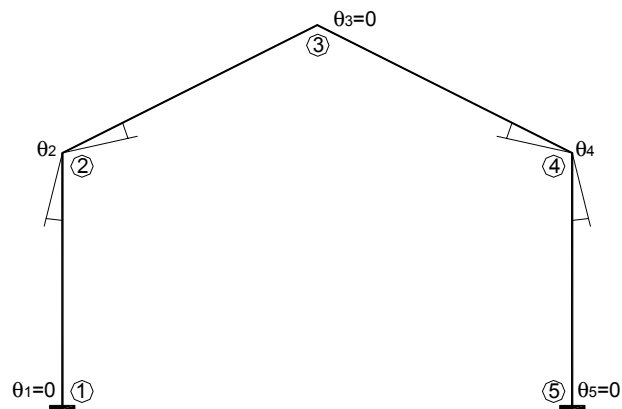


Ejercicio No. 1.6

Aplicar el método pendiente-deflexión al marco mostrada en la figura, para determinar los elementos mecánicos en los extremos de cada una de las barras, así como los desplazamientos en los nodos.

**SOLUCION****I) CONDICIONES GENERALES DE DEFORMACION**

Rotaciones θ :



En el apoyo 1, $\theta_1 = 0$ En el nodo 2, $\theta_2 \neq 0$.

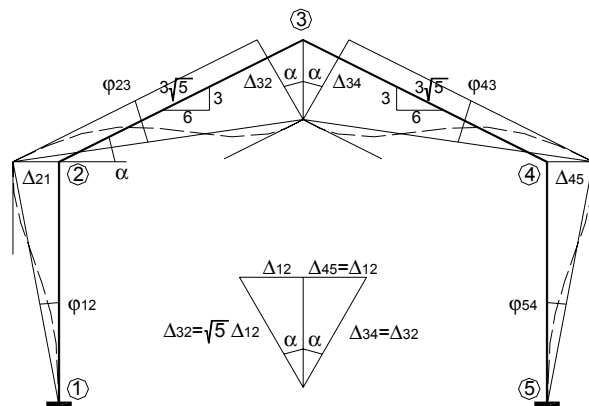
En el apoyo 5, $\theta_5 = 0$ En el nodo 4, $\theta_4 \neq 0$.

Dadas las condiciones de simetría en la carga aplicada, $\theta_2 = -\theta_4$, $\theta_3 = 0$

Nótese que los desplazamientos se han supuesto en sentido positivo, el sentido correcto será determinado posteriormente.

Desplazamientos transversales relativos ϕ :

De acuerdo con la posible configuración de deformación, se presentará desplazamiento transversal relativo en los extremos de todas las barras, aunque por la condición de simetría, además de la consideración de no alargamiento de los elementos estructurales, los desplazamientos en los extremos de las dos columnas será el mismo. Para determinar estos desplazamientos se recurre al diagrama de deformaciones y se determinan las relaciones geométricas entre los desplazamientos, de esta manera se podrá reducir el número de incógnitas en el problema.



De la condición de simetría:

$$\Delta_{32} = \Delta_{34}$$

$$\Delta_{12} = \Delta_{54}$$

De el diagrama de deformación:

$$\Delta_{32} = \frac{\Delta_{12}}{\text{Sen}\alpha} = \frac{\Delta_{12}}{\frac{3}{3\sqrt{5}}} = \sqrt{5}\Delta_{12}$$

Así, las rotaciones ϕ en los diferentes elementos del marco, serán:

$$\phi_{12} = -\frac{\Delta_{12}}{L_{12}} = -\frac{\Delta_{12}}{6}$$

$$\phi_{32} = \frac{\Delta_{32}}{L_{32}} = \frac{\Delta_{32}}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}\Delta_{12}}{3\sqrt{5}} = \frac{\Delta_{12}}{3}$$

$$\phi_{45} = \frac{\Delta_{45}}{L_{45}} = \frac{\Delta_{12}}{6}$$

$$\phi_{34} = -\frac{\Delta_{34}}{L_{34}} = -\frac{\Delta_{32}}{3\sqrt{5}} = -\frac{\Delta_{12}}{3}$$

Nótese que los desplazamientos se han supuesto de acuerdo al sentido propuesto de deformación, el sentido correcto será determinado posteriormente.

II) MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO.

Los momentos de empotramiento, para el caso de las vigas, se deben determinar con la magnitud de la carga perpendicular al eje del elemento:

Barra 1-2:

No hay condición de carga.

En el extremo 1: $\overline{M}_{12} = 0$

En el extremo 2: $\overline{M}_{21} = 0$

Barra 5-4:

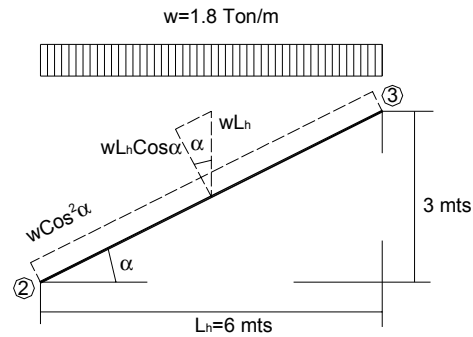
En el extremo 5: $\overline{M}_{54} = 0$

En el extremo 4: $\overline{M}_{45} = 0$

Barra 2-3 y 3-4:

Carga total concentrada = wL_h

Carga total perp. a la barra = $wL_h \cos\alpha$



$$\text{Carga uniform. dist. perp. a la barra} = \frac{w L_h \cos \alpha}{L_{23}} = \frac{w L_h \cos \alpha}{\frac{L_h}{\cos \alpha}} = w \cos^2 \alpha$$

Momento de empotramiento para carga dist.

$$\bar{M}_{23} = -\frac{w_p L_{23}^2}{12} = -\frac{(w \cos^2 \alpha) L_{23}^2}{12} = -\frac{(w \cos^2 \alpha) \left(\frac{L_h}{\cos \alpha} \right)^2}{12}$$

$$\bar{M}_{23} = -\frac{w L_h^2}{12}$$

De esta manera se determinan los momentos de empotramiento en los extremos de las barras inclinadas.

$$\text{En el extremo 2: } \bar{M}_{23} = -\frac{(1.8)(6.0)^2}{12} = -5.4 \text{ ton-m}$$

$$\text{En el extremo 3: } \bar{M}_{32} = \frac{(1.8)(6.0)^2}{12} = 5.4 \text{ ton-m}$$

$$\text{En el extremo 3: } \bar{M}_{34} = -\frac{(1.8)(6.0)^2}{12} = -5.4 \text{ ton-m}$$

$$\text{En el extremo 4: } \bar{M}_{43} = \frac{(1.8)(6.0)^2}{12} = 5.4 \text{ ton-m}$$

III) RIGIDECES RELATIVAS $\left(K = \frac{I}{L} \right)$

Tramo	Inercia	Long.	$K=I/L$	Rigidez
1-2	2I	6.0	0.333I	0.333I=k
2-3	3I	6.708	0.447I	$(0.447I)k/0.333I=1.3416k$
3-4	3I	6.708	0.447I	$(0.447I)k/0.333I=1.3416k$
4-5	2I	6.0	0.333I	$0.333Ik/0.333I=k$

IV) ECUACIONES PENDIENTE-DEFLEXION EN CADA TRAMO

Barra 1-2

$$M_{12} = \overline{M}_{12} + \frac{2EI}{L}(2\theta_1 + \theta_2 - 3\varphi_{12}) = 0 + 2E(K) \left[0 + \theta_2 - 3 \left(-\frac{\Delta_{12}}{6} \right) \right]$$

$$M_{12} = 2Ek\theta_2 + Ek\Delta_{12}$$

$$M_{21} = \overline{M}_{21} + \frac{2EI}{L}(\theta_1 + 2\theta_2 - 3\varphi_{12}) = 0 + 2E(K) \left[0 + 2\theta_2 - 3 \left(-\frac{\Delta_{12}}{6} \right) \right]$$

$$M_{21} = 4Ek\theta_2 + Ek\Delta_{12}$$

Barra 2-3

$$M_{23} = \overline{M}_{23} + \frac{2EI}{L}(2\theta_2 + \theta_3 - 3\varphi_{23}) = -5.4 + 2E(1.3416K) \left[2\theta_2 + 0 - 3 \left(\frac{\Delta_{12}}{3} \right) \right]$$

$$M_{23} = -5.4 + 5.3664Ek\theta_2 - 2.6832Ek\Delta_{12}$$

$$M_{32} = \overline{M}_{32} + \frac{2EI}{L}(\theta_2 + 2\theta_3 - 3\varphi_{23}) = 5.4 + 2E(1.3416K) \left[\theta_2 + 0 - 3 \left(\frac{\Delta_{12}}{3} \right) \right]$$

$$M_{32} = 5.4 + 2.6832Ek\theta_2 - 2.6832Ek\Delta_{12}$$

Barra 3-4

$$M_{34} = \overline{M}_{34} + \frac{2EI}{L}(2\theta_3 + \theta_4 - 3\varphi_{34}) = -5.4 + 2E(1.3416K) \left[0 + \theta_4 - 3 \left(-\frac{\Delta_{12}}{3} \right) \right]$$

$$M_{34} = -5.4 + 2.6832Ek\theta_4 + 2.6832Ek\Delta_{12}$$

$$M_{43} = \overline{M}_{43} + \frac{2EI}{L}(\theta_3 + 2\theta_4 - 3\varphi_{34}) = 5.4 + 2E(1.3416K) \left[0 + \theta_4 - 3 \left(-\frac{\Delta_{12}}{3} \right) \right]$$

$$M_{43} = 5.4 + 2.6832Ek\theta_4 + 2.6832Ek\Delta_{12}$$

Barra 4-5

$$M_{45} = \overline{M}_{45} + \frac{2EI}{L}(2\theta_4 + \theta_5 - 3\varphi_{45}) = 0 + 2E(K) \left[2(-\theta_2) + 0 - 3 \left(\frac{\Delta_{12}}{6} \right) \right]$$

$$M_{45} = -4Ek\theta_2 - Ek\Delta_{12}$$

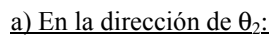
$$M_{54} = \overline{M}_{54} + \frac{2EI}{L}(\theta_4 + 2\theta_5 - 3\varphi_{45}) = 0 + 2E(K) \left[(-\theta_2) + 0 - 3 \left(\frac{\Delta_{12}}{6} \right) \right]$$

$$M_{54} = -2Ek\theta_2 - Ek\Delta_{12}$$

V) CONDICIONES DE EQUILIBRIO

Se plantea una condición de equilibrio por cada grado de libertad en la estructura, en el marco se tienen 5 grados de libertad que corresponden a los desplazamientos angulares (ó rotaciones) en los nodos 2 y 4 y los desplazamientos laterales Δ en los extremos de las columnas y el desplazamiento vertical del nodo 3, aunque por la relación trigonométrica del diagrama de deformación, se reduce a dos incógnitas, en este caso el desplazamiento lateral de la columna 1-2 y la rotación del nodo 2.

La condición de equilibrio en la dirección de los desplazamientos corresponde a una suma de momentos en los nodos mencionados.



JOEL MELCHOR OJEDA RUIZ

Por equilibrio, la fuerza $F_{H2'}$ será de igual magnitud a la fuerza F_{H3} esta fuerza está determinada por la sumatoria de momentos en el extremo 2 de la barra 2-3:

$$\sum M_2 = 0; M_{23} + M_{32} + \frac{(1.8)(6.0)^2}{2} + (3.0)F_{H3}$$

de aquí, que

$$F_{H3} = -\frac{1}{3}(M_{23} + M_{32} + 32.4)$$

$$F_{H3} = -\frac{1}{3}[(-5.4 + 5.3664Ek\theta_2 - 2.6832Ek\Delta_{12}) + (5.4 + 2.6832Ek\theta_2 - 2.6832Ek\Delta_{12} + 32.4)]$$

$$F_{H3} = -\frac{1}{3}(8.0496Ek\theta_2 - 5.366Ek\Delta_{12} + 32.4) = -2.6832Ek\theta_2 + 1.7888Ek\Delta_{12} - 10.8$$

$$F_{H2'} = -2.6832Ek\theta_2 + 1.7888Ek\Delta_{12} - 10.8$$

Por lo que la condición de equilibrio planteada será:

$$(Ek\theta_2 + 0.333Ek\Delta_{12}) + (-2.6832Ek\theta_2 + 1.7888Ek\Delta_{12} - 10.8) = 0$$

$$-1.6832Ek\theta_2 + 2.1218Ek\Delta_{12} = 10.8 \quad \dots\dots\dots (2)$$

VI) SISTEMA DE ECUACIONES DEL MARCO.

A partir de las condiciones de equilibrio se genera el sistema de ecuaciones, en el cual las variables corresponden a los desplazamientos del marco, así resolviendo este sistema de ecuaciones encontramos la magnitud y el sentido de aplicación de los diferentes desplazamientos.

Las ecuaciones mostradas anteriormente, (1) y (2), forman el sistema mencionado:

$$9.3664Ek\theta_2 - 1.6832Ek\Delta_{12} = 5.4 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$-1.6832Ek\theta_2 + 2.1218Ek\Delta_{12} = 10.8 \quad \dots\dots\dots (2)$$

Arreglando términos y expresando el sistema en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 9.3664Ek & -1.6832Ek \\ -1.6832Ek & 2.1218Ek \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \Delta_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5.4 \\ 10.8 \end{Bmatrix}$$

La representación anterior es de la forma $[K]\{\delta\}=\{F\}$, que es la forma básica del método de rigideces. Nótese que la matriz $[K]$ (matriz de rigidez) es simétrica, lo cual asegura que el sistema de ecuaciones tenga solución.

Para resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 9.3664 & -1.6832 \\ -1.6832 & 2.1218 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Ek\theta_2 \\ Ek\Delta_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5.4 \\ 10.8 \end{Bmatrix}$$

SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES

$$Ek\theta_2 = 1.7392$$

$$Ek\Delta_{12} = 6.4697$$

Expresando los desplazamientos en términos del coeficiente de rigidez a la flexión EI:

$$EI\theta_2 = 5.2176$$

$$EI\Delta_{12} = 19.4091$$

VII) MOMENTOS FLEXIONANTES EN LOS EXTREMOS DE CADA BARRA

A partir de las ecuaciones pendiente-deflexión definidas para cada tramo y tomando en cuenta los desplazamientos en cada apoyo:

Barra 1-2

$$M_{12} = 2Ek\theta_2 + Ek\Delta_{12} = 2(1.7392) + (6.4697) = 9.9481 \text{ ton} - \text{m}$$

$$M_{21} = 4Ek\theta_2 + Ek\Delta_{12} = 4(1.7392) + (6.4697) = 13.427 \text{ ton} - \text{m}$$

Barra 2-3

$$M_{23} = -5.4 + 5.3664Ek\theta_2 - 2.6832Ek\Delta_{12} = -5.4 + 5.3664(1.7392) - 2.6832(6.4697) = -13.426 \text{ ton} - \text{m}$$

$$M_{32} = 5.4 + 2.6832Ek\theta_2 - 2.6832Ek\Delta_{12} = 5.4 + 2.6832(1.7392) - 2.6832(6.4697) = -7.293 \text{ ton} - \text{m}$$

Barra 3-4

$$M_{34} = -5.4 + 2.6832Ek\theta_4 + 2.6832Ek\Delta_{12} = -5.4 + 2.6832(-1.7392) + 2.6832(6.4697) = 7.293 \text{ ton} - \text{m}$$

$$M_{43} = 5.4 + 5.3664Ek\theta_4 + 2.6832Ek\Delta_{12} = 5.4 + 5.3664(-1.7392) + 2.6832(6.4697) = 13.426 \text{ ton} - \text{m}$$

Barra 4-5

$$M_{45} = -4Ek\theta_4 - Ek\Delta_{12} = -4(-1.7392) - (6.4697) = -13.427 \text{ ton} - \text{m}$$

$$M_{54} = -2Ek\theta_4 - Ek\Delta_{12} = -2(-1.7392) - (6.4697) = -9.948 \text{ ton} - \text{m}$$

VIII) VERIFICACION DE LAS CONDICIONES DE EQUILIBRIO

$$\sum M_2 = 0; M_{21} + M_{23} = 0$$

$$13.427 + (-13.426) = 0.001$$

$$\sum F_H = 0; F_{H2} + F_{H2'} = 0$$

$$F_{H2} = \left(\frac{M_{12} + M_{21}}{L_{12}} \right) = \left[\frac{(9.948) + (13.426)}{6.0} \right] = 3.896 \text{ ton}$$

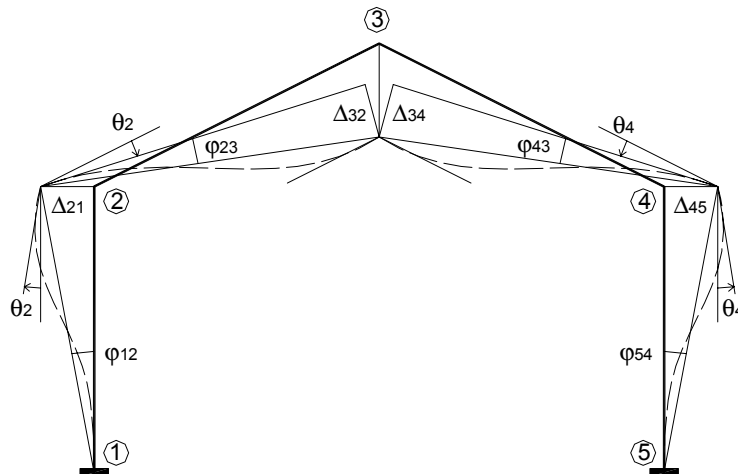
$$F_{H2'} = -2.6832Ek\theta_2 + 1.7888Ek\Delta_{12} - 10.8 = -2.6832(1.7392) + 1.7888(6.4697) - 10.8 = -3.894$$

por lo que:

$$3.896 - 3.894 = 0.002$$

DE ESTOS RESULTADOS SE OBSERVA QUE EFECTIVAMENTE, SI SE CUMPLEN LAS CONDICIONES DE EQUILIBRIO.

IX) CONFIGURACION DE DEFORMACION



X) DIAGRAMAS DE FUERZAS CORTANTES, MOMENTOS FLEXIONANTES Y FUERZAS AXIALES

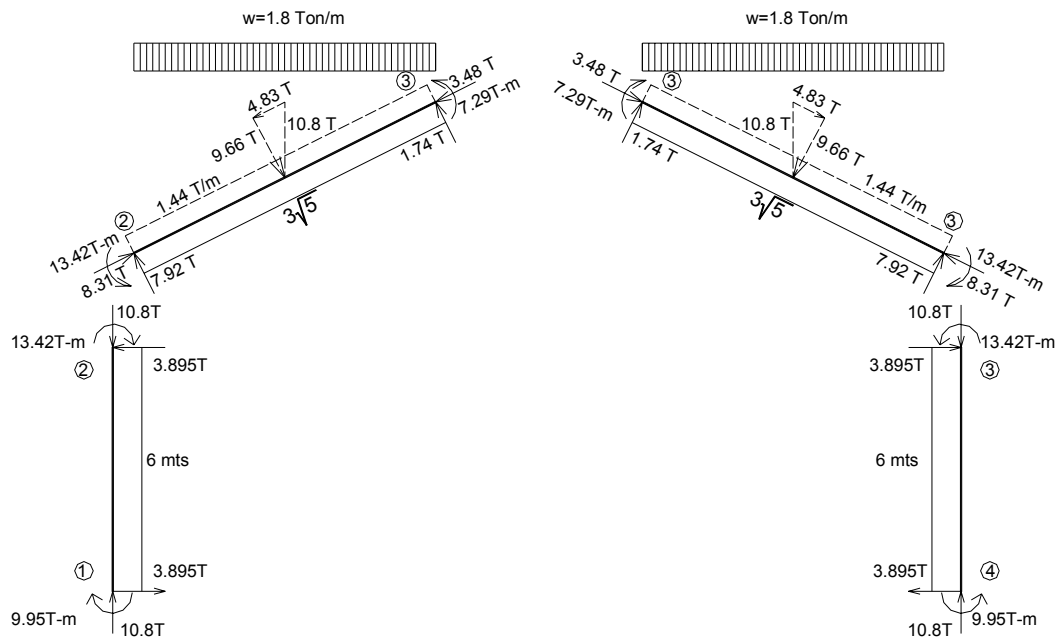


Diagrama de fuerzas cortantes

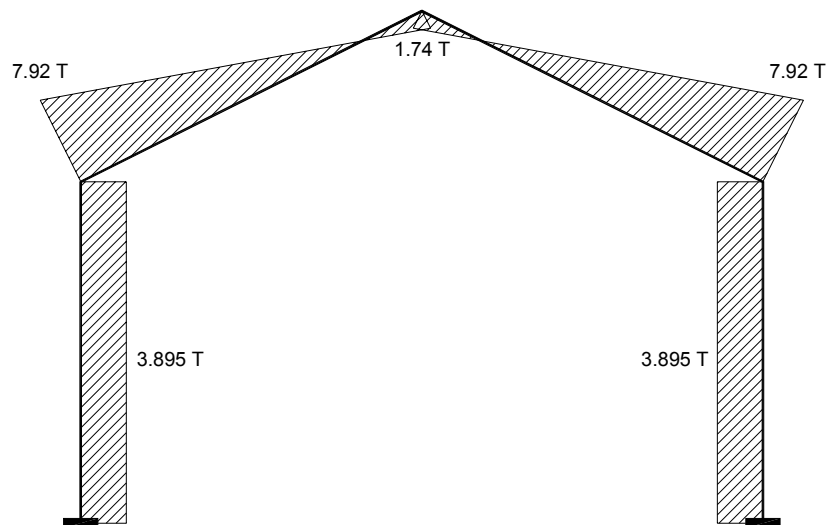
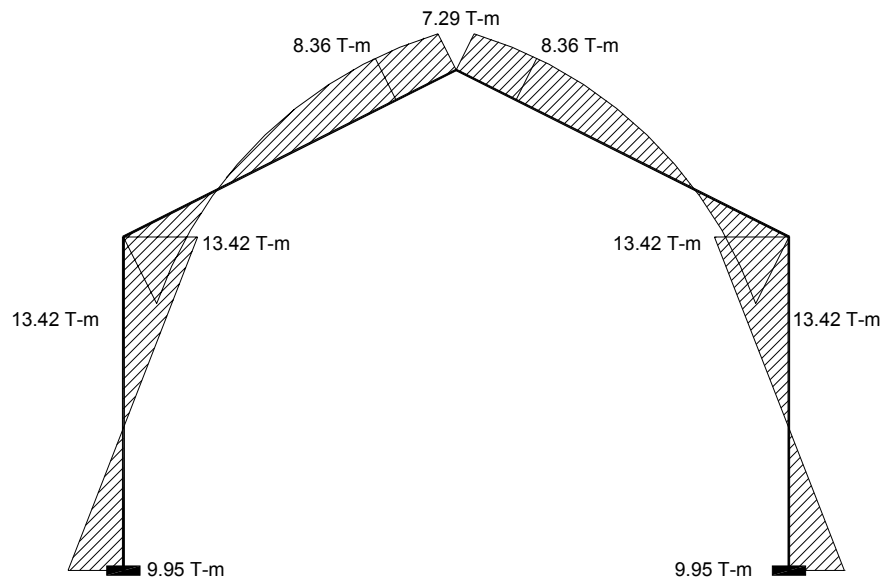
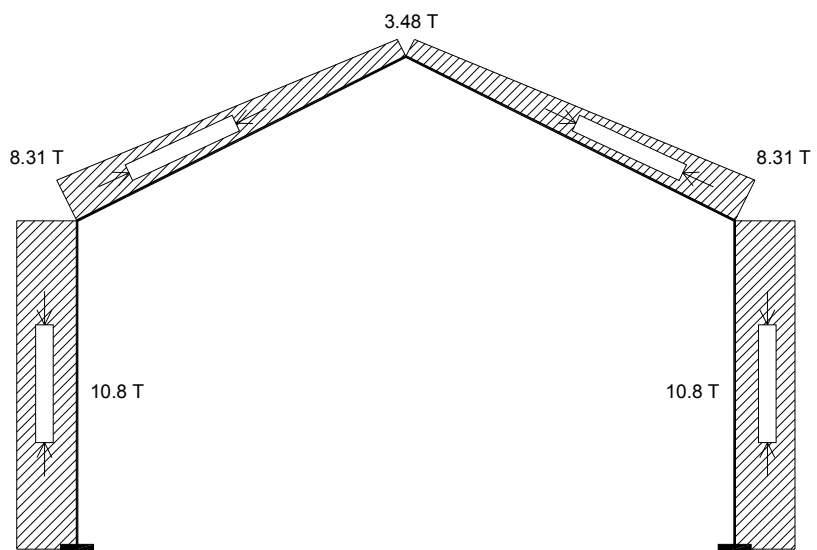


Diagrama de momentos flexionantes**Diagrama de fuerzas axiales**

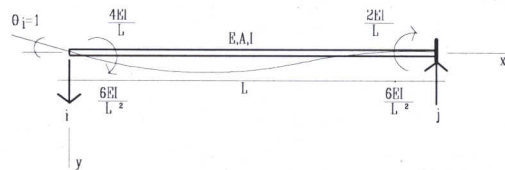
METODO MATRICIAL DE RIGIDECES

Este método se fundamenta en los principios de: continuidad, la ley de Hooke y el de equilibrio. El principio de continuidad se define a través del establecimiento de la compatibilidad de las deformaciones de una sección de una barra, con las secciones circundantes a ella. A través de la ley de Hooke se establecen las relaciones esfuerzo-deformación de los materiales, mientras estos se comportan en el rango elástico, la relación será lineal. Finalmente, integrar los efectos producidos por las deformaciones que provienen de una junta con los efectos considerados en la ley de Hooke, es una operación que se debe llevar a cabo cumpliendo con los requerimientos de equilibrio estático.

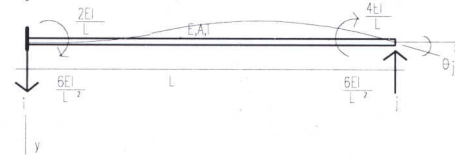
Los principios mencionados anteriormente conducen a la relación: $F=k\delta$. En donde "F", es la fuerza en la dirección del desplazamiento " δ ", que se produce debido a la rigidez "k". Al considerar un sistema de fuerzas asociado a un campo de desplazamientos, la expresión en su representación matricial, tiene la siguiente forma: $\{F\} = [K]\{\delta\}$. La expresión anterior es la forma básica del método de rigideces.

A continuación se define la matriz de rigidez de un elemento barra, de sección prismática de sección constante, sometida exclusivamente a esfuerzos de flexión (se considera rotación positiva en sentido horario).

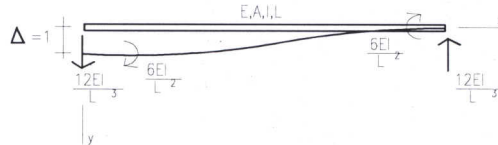
1o. Se hace girar el extremo "i", un valor $\theta_i=1$, manteniendo fijo el extremo "j" (las fuerzas cortantes que se muestran, son efectos producidos por la rotación en "i")



2o. Se hace girar el extremo "j", un valor $\theta_j=1$, manteniendo fijo el extremo "i" (las fuerzas cortantes que se muestran, son efectos producidos por la rotación en "j")



3o. Se permite el desplazamiento transversal relativo " Δ " entre los puntos "i" y "j" ($\Delta=1$), sin permitir la rotación angular de los extremos de la barra (las fuerzas cortantes que se muestran, son efectos producidos por el desplazamiento Δ)



4o. Finalmente por superposición de causas y efectos

$$M_i = \frac{4EI}{L}\theta_i + \frac{2EI}{L}\theta_j + \frac{6EI}{L^2}\Delta$$

$$V_i = \frac{6EI}{L^2}\theta_i + \frac{6EI}{L^2}\theta_j + \frac{12EI}{L^3}\Delta$$

$$M_j = \frac{2EI}{L}\theta_i + \frac{4EI}{L}\theta_j + \frac{6EI}{L^2}\Delta$$

$$V_j = -\frac{6EI}{L^2}\theta_i - \frac{6EI}{L^2}\theta_j - \frac{12EI}{L^3}\Delta$$

$$M_i = \frac{4EI}{L}\theta_i + \frac{2EI}{L}\theta_j + \frac{6EI}{L^2}\vartheta_i - \frac{6EI}{L^2}\vartheta_j$$

$$V_i = \frac{6EI}{L^2}\theta_i + \frac{6EI}{L^2}\theta_j + \frac{12EI}{L^3}\vartheta_i - \frac{12EI}{L^3}\vartheta_j$$

$$M_j = \frac{2EI}{L}\theta_i + \frac{4EI}{L}\theta_j + \frac{6EI}{L^2}\vartheta_i - \frac{6EI}{L^2}\vartheta_j$$

$$V_j = -\frac{6EI}{L^2}\theta_i - \frac{6EI}{L^2}\theta_j - \frac{12EI}{L^3}\vartheta_i + \frac{12EI}{L^3}\vartheta_j$$

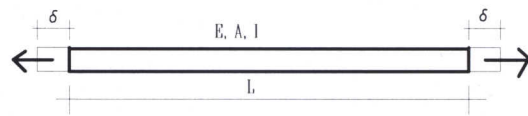
en donde $\Delta = \vartheta_i - \vartheta_j$

Reordenando y expresando en matricialmente el sistema de ecuaciones anterior:

$$\begin{Bmatrix} V_i \\ M_i \\ V_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \theta_i \\ \delta_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

$$\{F\} = [K]\{\delta\}$$

En esta representación matricial, la matriz de rigidez no toma en cuenta los efectos por deformación axial. Al tomarlos en cuenta y considerando un comportamiento elástico-lineal, la fuerza axial necesaria para producir un desplazamiento axial “ δ ”, en una barra con sección transversal “A”, módulo de elasticidad “E” y longitud “L”, está determinada por:



$$P = \frac{EA}{L} \delta$$

en esta expresión el desplazamiento es proporcional a la carga: $P \propto \delta$, la constante de proporcionalidad es la rigidez de la barra a la deformación axial:

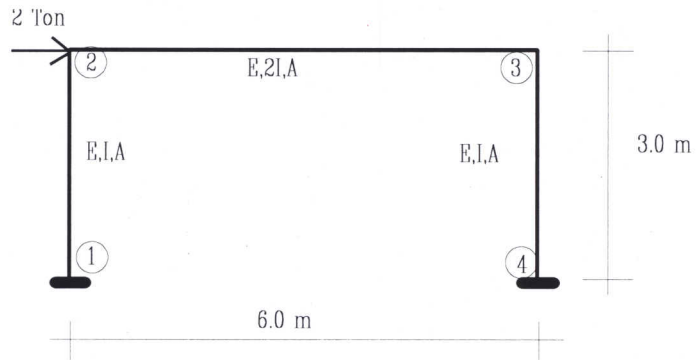
$$P = K_{\delta} \delta, \text{ en donde } K_{\delta} = \frac{EA}{L}$$

Así, para una barra con posibilidad de tres grados de desplazamiento en en cada uno de los extremos, el arreglo matricial estará dado de la siguiente manera:



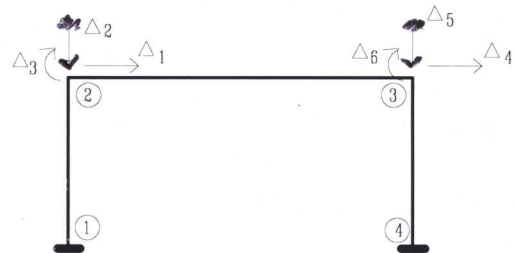
$$\begin{Bmatrix} P_i \\ V_i \\ M_i \\ P_j \\ V_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \theta_i \\ \delta_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

Aplicar el método de rigideces en su forma convencional para determinar los desplazamientos y elementos mecánicos en las barras del marco mostrado en la figura.



Solución:

Los posibles grados de libertad que se permiten a cada uno de los nodos, considerando tres grados de libertad por cada nodo, están representados en la siguiente figura.



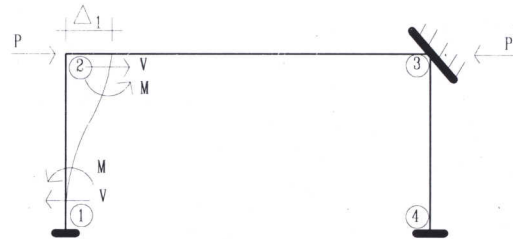
Ahora se determinarán las fuerzas internas que se producen al provocar cada uno de los posibles desplazamientos, actuando en forma independiente entre sí.

1. Provocando el desplazamiento horizontal en el nodo 2:

$$P = \frac{EA}{L} \Delta_1 = \frac{EA}{6} \Delta_1 = 0.167EA \Delta_1$$

$$M = \frac{6EI}{L^2} \Delta_1 = \frac{6EI}{(3)^2} \Delta_1 = 0.667EI \Delta_1$$

$$V = \frac{12EI}{L^3} \Delta_1 = \frac{12EI}{(3)^3} \Delta_1 = 0.444EI \Delta_1$$

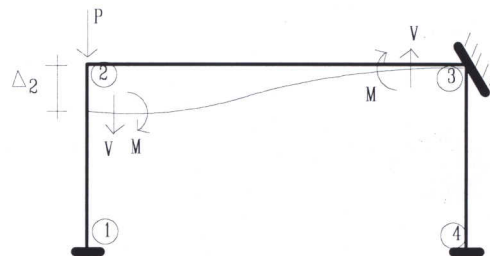


2. Provocando el desplazamiento vertical en el nodo 2:

$$P = \frac{EA}{L} \Delta_2 = \frac{EA}{3} \Delta_2 = 0.333EA \Delta_2$$

$$M = \frac{6EI}{L^2} \Delta_2 = \frac{6E(2I)}{(6)^2} \Delta_2 = 0.333EI \Delta_2$$

$$V = \frac{12EI}{L^3} \Delta_2 = \frac{12E(2I)}{(6)^3} \Delta_2 = 0.111EI \Delta_2$$



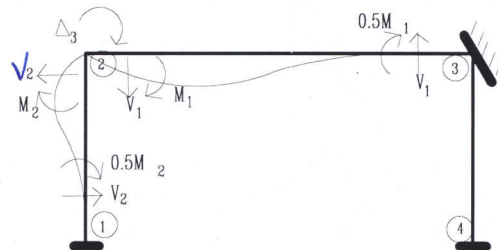
3. Provocando el giro en el nodo 2:

$$M_1 = \frac{4EI}{L} \Delta_3 = \frac{4E(2I)}{6} \Delta_3 = 1.333EI \Delta_3$$

$$V_1 = \frac{6EI}{L^2} \Delta_3 = \frac{6E(2I)}{(6)^2} \Delta_3 = 0.333EI \Delta_3$$

$$M_2 = \frac{4EI}{L} \Delta_3 = \frac{4EI}{3} \Delta_3 = 1.333EI \Delta_3$$

$$V_2 = \frac{6EI}{L^2} \Delta_3 = \frac{6EI}{(3)^2} \Delta_3 = 0.667EI \Delta_3$$

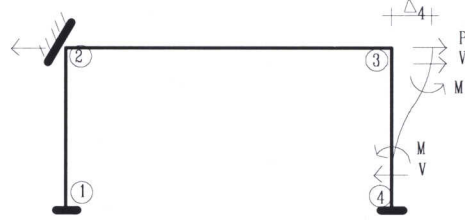


4. Provocando el desplazamiento horizontal en el nodo 3:

$$P = \frac{EA}{L} \Delta_4 = \frac{EA}{6} \Delta_4 = 0.167EA\Delta_4$$

$$M = \frac{6EI}{L^2} \Delta_4 = \frac{6EI}{(3)^2} \Delta_4 = 0.667EI\Delta_4$$

$$V = \frac{12EI}{L^3} \Delta_4 = \frac{12EI}{(3)^3} \Delta_4 = 0.444EI\Delta_4$$

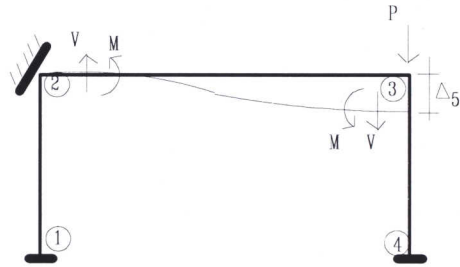


5. Provocando el desplazamiento vertical en el nodo 3:

$$P = \frac{EA}{L} \Delta_5 = \frac{EA}{6} \Delta_5 = 0.333EA\Delta_5$$

$$M = \frac{6EI}{L^2} \Delta_5 = \frac{6E(2I)}{(6)^2} \Delta_5 = 0.333EI\Delta_5$$

$$V = \frac{12EI}{L^3} \Delta_5 = \frac{12E(2I)}{(6)^3} \Delta_5 = 0.111EI\Delta_5$$



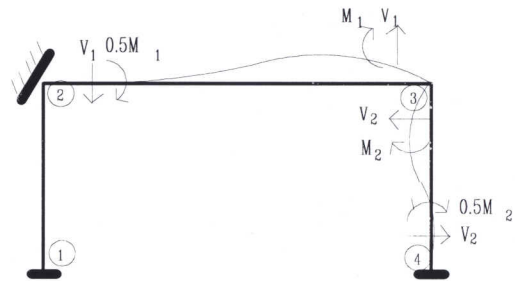
6. Provocando la rotación en el nodo 3:

$$M_1 = \frac{4EI}{L} \Delta_6 = \frac{4E(2I)}{6} \Delta_6 = 1.333EI\Delta_6$$

$$V_1 = \frac{6EI}{L^2} \Delta_6 = \frac{6E(2I)}{(6)^2} \Delta_6 = 0.333EI\Delta_6$$

$$M_2 = \frac{4EI}{L} \Delta_6 = \frac{4EI}{3} \Delta_6 = 1.333EI\Delta_6$$

$$V_2 = \frac{6EI}{L^2} \Delta_6 = \frac{6EI}{(3)^2} \Delta_6 = 0.667EI\Delta_6$$



Posteriormente, aplicando las condiciones de equilibrio de las fuerzas internas determinadas anteriormente, con las fuerzas externas en la dirección de cada uno de los desplazamientos considerados en el marco:

1. En la dirección de Δ_1 , se lleva a cabo una sumatoria de las fuerzas en el nodo 1 (por sobreposición de efectos de cada desplazamiento considerado), en la dirección del desplazamiento horizontal, considerando positivas las fuerzas que tienen el mismo sentido que el desplazamiento:

$$0.167EA\Delta_1 + 0.444EI\Delta_1 - 0.667EI\Delta_3 - 0.167EA\Delta_4 = F_{1X}$$

2. De igual manera, en la dirección de Δ_2 , se lleva a cabo una sumatoria de fuerzas verticales en el nodo 1, producidas por cada una de las condiciones de deformación:

$$0.333EA\Delta_2 + 0.111EI\Delta_2 + 0.333EI\Delta_3 - 0.111EI\Delta_5 + 0.333EI\Delta_6 = F_{1Y}$$

3. En la dirección de Δ_3 :

$$-0.667EI\Delta_1 + 0.333EI\Delta_2 + 1.333EI\Delta_3 + 1.333EI\Delta_3 - 0.333EI\Delta_5 + 0.667EI\Delta_6 = F_{1Z}$$

4. En la dirección de Δ_4 :

$$-0.167EA\Delta_1 + 0.167EA\Delta_4 + 0.444EI\Delta_4 - 0.667EI\Delta_6 = F_{1X}$$

5. En la dirección de Δ_5 :

$$-0.111EI\Delta_2 - 0.333EI\Delta_3 + 0.111EI\Delta_5 + 0.333EA\Delta_5 - 0.333EI\Delta_6 = F_{2Y}$$

6. En la dirección de Δ_6 :

$$0.333EI\Delta_2 + 0.667EI\Delta_3 - 0.667EI\Delta_4 - 0.333EI\Delta_5 + 1.333EI\Delta_6 + 1.333EI\Delta_6 = F_{3Z}$$

Representando el sistema de ecuaciones en forma matricial, obtenido de la condición de equilibrio:

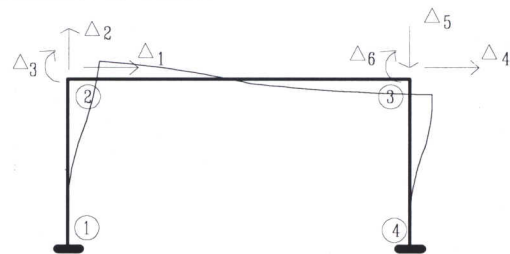
0.167EA+0.444EI	0	-0.667EI	-0.167EA	0	0	Δ_1	F_{2X}
0	0.333EA+0.111EI	0.333EI	0	-0.111EI	0.333EI	Δ_2	F_{2Y}
-0.667EI	0.333EI	1.333EI+1.333EI	0	-0.333EI	0.667EI	Δ_3	F_{2Z}
-0.167EA	0	0	0.167EA+0.444EI	0	-0.667EI	Δ_4	F_{3X}
0	-0.111EI	-0.333EI	0	0.111EI+0.333EA	-0.333EI	Δ_5	F_{3Y}
0	0.333EI	0.667EI	-0.667EI	-0.333EI	1.333EI+1.333EI	Δ_6	F_{3Z}

En esta representación matricial: $[K]\{\delta\} = \{F\}$ está representada la estructura completa, $[K]$ es la matriz de rigidez del marco (esta es única e independiente del sistema de cargas), el vector $\{\delta\}$ corresponde a los desplazamientos del marco y el vector $\{F\}$ corresponde al vector de fuerzas externas en la dirección de cada uno de los desplazamientos:

$$\begin{Bmatrix} F_{2X} \\ F_{2Y} \\ F_{2Z} \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \\ F_{3Z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix}$$

Tomando en cuenta este vector de fuerzas externas y considerando $E=1$, $I=1$, $A=1$, la solución del sistema de ecuaciones determina los valores de los desplazamientos del marco:

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5.526 \\ -1.177 \\ 1.581 \\ 1.925 \\ 1.177 \\ 0.38 \end{Bmatrix}$$



Si fuera necesario analizar el mismo marco bajo distintas condiciones de carga (ya sean cargas muertas, cargas vivas ó cargas accidentales -sismo ó viento), no es necesario repetir el procedimiento, lo único que habría que modificar sería el vector de cargas $\{F\}$.

Una vez determinados los valores de los desplazamientos del marco, es posible determinar las fuerzas en los extremos de cada una de las barras, partiendo de la expresión $[k]\{\delta\}=\{f\}$, en donde $[k]$ es la matriz de rigidez del elemento, $\{\delta\}$ es el vector de desplazamientos de los extremos del elemento y $\{f\}$ corresponde a los elementos mecánicos en los extremos de la barra:

Para una barra en sometida a flexión, se determinó anteriormente que:

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & +\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & +\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & +\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & +\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Así para la barra 1-2, $E=1$, $A=1$, $I=1$, $L=3$, los desplazamientos en los extremos de esta barra, en extremo 1, son nulos por el tipo de apoyo (empotramiento); en el extremo 2 el desplazamiento a lo largo del eje longitudinal es Δ_2 (positivo, ya que el desplazamiento es en la dirección del eje longitudinal, como se planteó al determinar los factores de rigidez en la barra), el desplazamiento transversal al eje longitudinal es Δ_1 (positivo, de acuerdo con la convención de signos utilizada al determinar los factores de rigidez en la matriz $[k]$) y la rotación es Δ_3 .

$$\{f\}_{1-2} = \begin{bmatrix} 0.333 & 0 & 0 & -0.333 & 0 & 0 \\ 0 & 0.444 & 0.667 & 0 & -0.444 & 0.667 \\ 0 & 0.667 & 1.333 & 0 & -0.667 & 0.667 \\ -0.333 & 0 & 0 & 0.333 & 0 & 0 \\ 0 & -0.444 & -0.667 & 0 & 0.444 & -0.667 \\ 0 & 0.667 & 0.667 & 0 & -0.667 & 1.333 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.177 \\ 5.526 \\ 1.581 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.392 \\ -1.399 \\ -2.631 \\ 0.392 \\ 1.399 \\ -1.578 \end{Bmatrix}$$

Para la barra 2-3, $E=1$, $A=1$, $I=2$, $L=6$, en el extremo 2 el desplazamiento a lo largo del eje longitudinal es Δ_1 (positivo, ya que el desplazamiento es en la dirección del eje longitudinal, como se planteó al determinar los factores de rigidez en la barra), el desplazamiento transversal al eje longitudinal es Δ_2 (negativo, de acuerdo con la convención de signos utilizada al determinar los factores de rigidez en la matriz $[k]$) y la rotación es Δ_3 . En el extremo 3, el desplazamiento a lo largo del eje longitudinal es Δ_4 (positivo), el desplazamiento transversal al eje longitudinal es Δ_5 (positivo) y la rotación es Δ_6 .

$$\{f\}_{2-3} = \begin{bmatrix} 0.167 & 0 & 0 & -0.167 & 0 & 0 \\ 0 & 0.111 & 0.333 & 0 & -0.111 & 0.333 \\ 0 & 0.333 & 1.333 & 0 & -0.333 & 0.667 \\ -0.167 & 0 & 0 & 0.167 & 0 & 0 \\ 0 & -0.111 & -0.333 & 0 & 0.111 & -0.333 \\ 0 & 0.333 & 0.667 & 0 & -0.333 & 1.333 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 5.526 \\ -1.177 \\ 1.581 \\ 1.925 \\ 1.177 \\ 0.38 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.601 \\ 0.39 \\ 1.577 \\ -0.601 \\ -0.392 \\ 0.777 \end{Bmatrix}$$

Para la barra 3-4, $E=1$, $A=1$, $I=1$, $L=3$, los datos son similares que la barra 1-2. El desplazamiento en el extremo 4 son nulos por el empotramiento en el apoyo. En el extremo 3 el desplazamiento en la dirección del eje longitudinal es Δ_5 (positivo), el desplazamiento en la dirección transversal al eje longitudinal es Δ_4 (negativo) y la rotación es Δ_6 .

$$\{f\}_{3-4} = \begin{bmatrix} 0.333 & 0 & 0 & -0.333 & 0 & 0 \\ 0 & 0.444 & 0.667 & 0 & -0.444 & 0.667 \\ 0 & 0.667 & 1.333 & 0 & -0.667 & 0.667 \\ -0.333 & 0 & 0 & 0.333 & 0 & 0 \\ 0 & -0.444 & -0.667 & 0 & 0.444 & -0.667 \\ 0 & 0.667 & 0.667 & 0 & -0.667 & 1.333 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.177 \\ -1.925 \\ 0.38 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.392 \\ -0.601 \\ -0.777 \\ -0.39 \\ 0.601 \\ -1.031 \end{Bmatrix}$$

Finalmente, las fuerzas en cada barra, quedan representadas de la siguiente manera:



En esta representación se puede verificar que se cumplen las tres condiciones de equilibrio estático:

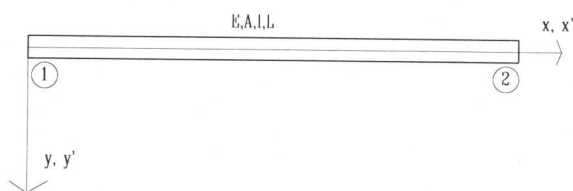
$$\sum F_X = 0: \sum F_Y = 0: \sum M_Z = 0$$

PLANTEAMIENTO MATRICIAL DEL METODO.

La potencialidad del método estriba en el manejo de la información de la estructura, si esta se lleva a cabo dentro de un esquema de álgebra matricial, en donde la rigidez de cada uno de los elementos de la estructura forma parte de un sector de la matriz global de rigidez. Para que esto sea posible, es necesario que el sistema de ejes coordenados de la estructura coincida con el sistema de ejes de cada uno de los elementos estructurales, es decir, el manejo de un sistema global de coordenadas. A este sistema global de coordenadas deberán estar referidos también los vectores de carga externa y de desplazamientos. Este requerimiento implica que se debe llevar a cabo un procedimiento de transformación de coordenadas, tanto para la rigidez de cada barra como para el vector de cargas.

3.1.3 Transformación de coordenadas.

Al considerar una barra sometida a flexión, se establece la relación $[k]\{\delta\}=[f]$, la cual está referida a un sistema de ejes definido por el eje longitudinal de la barra, para el caso de una barra horizontal, este sistema de ejes de la barra (local, δ') coincide con el sistema de ejes global $\{\delta\}$



$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_{1X} \\ \delta_{1Y} \\ \delta_{1Z} \\ \delta_{2X} \\ \delta_{2Y} \\ \delta_{2Z} \end{Bmatrix}, \{f\} = \begin{Bmatrix} f_{1X} \\ f_{1Y} \\ f_{1Z} \\ f_{2X} \\ f_{2Y} \\ f_{2Z} \end{Bmatrix}$$

Si la barra se inclinara un ángulo α (positivo en sentido horario), ¿en qué forma se modificaría la relación $[k]\{\delta\}=[f]$? En principio, sería necesario determinar las componentes de rigidez, desplazamiento y fuerza referidas al sistema global de coordenadas.

Transformación de coordenadas del vector de desplazamientos $\{\delta\}$:

Considerando cualquiera de los extremos de la barra 1-2

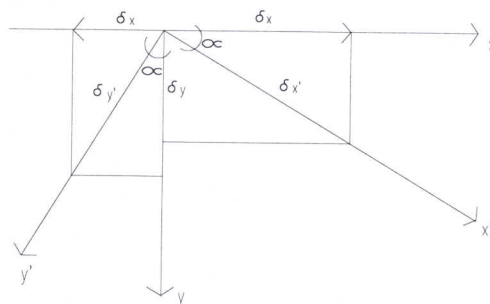
$$\delta_X = \delta'_X \cos\alpha - \delta'_Y \sin\alpha$$

$$\delta_Y = \delta'_X \sin\alpha + \delta'_Y \cos\alpha$$

$$\theta = \theta'$$

Matricialmente:

$$\begin{Bmatrix} \delta_X \\ \delta_Y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta'_X \\ \delta'_Y \\ \theta' \end{Bmatrix}$$



La expresión anterior se puede representar de forma simplificada: $\{\delta\}=[t]\{\delta'\}$. En donde el vector $\{\delta\}$ representa el vector de desplazamientos en coordenadas globales y la matriz $[t]$, representa la matriz de transformación de coordenadas de un sistema a otro (de local a global).

Al considerar la transformación de coordenadas de las componentes de desplazamiento en ambos extremos (1 y 2) de la barra, del sistema local a global:

$$\text{Para el nodo 1: } \{\delta_1\}=[t]\{\delta'_1\}$$

$$\text{Para el nodo 2: } \{\delta_2\}=[t]\{\delta'_2\}$$

Matricialmente, la transformación quedaría representada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\{\delta\} &= [T]\{\delta'\} \\ \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1' \\ \delta_2' \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \delta_{1X} \\ \delta_{1Y} \\ \theta_1 \\ \delta_{2X} \\ \delta_{2Y} \\ \theta_2 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{1X}' \\ \delta_{1Y}' \\ \theta_1' \\ \delta_{2X}' \\ \delta_{2Y}' \\ \theta_2' \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

Al aplicar el método matricial de rigideces al análisis de estructuras, como parte de la solución, se obtiene el vector de desplazamientos $\{\delta\}$ (referido al sistema global de coordenadas). A partir de este vector de desplazamientos y utilizando los terminos referidos a los desplazamientos en los extremos de cada barra, es decir, los desplazamientos asociados a los extremos de cada barra, se determinarán en ésta los elementos mecánicos (fuerza axial, fuerza cortante y momento flexionante) en ambos extremos, a partir de la relación $\{f\}=[k]\{\delta'\}$. Para ello, será necesario efectuar la transformación de coordenadas globales a locales, del vector de desplazamientos asociados a la barra en cuestión:

$$\begin{aligned}\{\delta\} &= [T]\{\delta'\} \\ [T]^{-1}\{\delta\} &= [T]^{-1}[T]\{\delta'\} \\ [T]^{-1}\{\delta\} &= [I]\{\delta'\} \\ [T]^{-1}\{\delta\} &= \{\delta'\}\end{aligned}$$

de acuerdo con las propiedades de las matrices detransformación, $[T]^{-1}=[T]^T$, por lo que

$$[T]^T\{\delta\}=\{\delta'\}$$

lo que significa que para obtener los desplazamientos en coordenadas locales se efectúa una transformación inversa de coordenadas.

Así, para efectuar la transformación de coordenadas de las componentes de desplazamiento en ambos extremos (1 y 2) de la barra, del sistema global al local:

$$\text{Para el nodo 1: } \{\delta_1'\}=[t]^T\{\delta_1\}$$

$$\text{Para el nodo 2: } \{\delta_2'\}=[t]^T\{\delta_2\}$$

Matricialmente, la transformación quedaría representada de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} \delta'_1 \\ \delta'_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t^T T_1 & 0 \\ 0 & t^T T_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix}$$

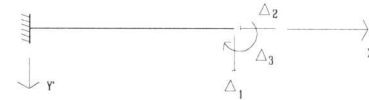
$$\begin{Bmatrix} \delta'_{1X} \\ \delta'_{1Y} \\ \theta'_1 \\ \delta'_{2X} \\ \delta'_{2Y} \\ \theta'_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{1X} \\ \delta_{1Y} \\ \theta_1 \\ \delta_{2X} \\ \delta_{2Y} \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Por ejemplo, para una barra vertical empotrada en el extremo "i" y con posibilidad de desplazamiento Δ_1 , Δ_2 y Δ_3 , en el extremo "j".



en coordenadas globales, la representación de los desplazamientos será con respecto al sistema X, Y

en coordenadas locales, los desplazamientos deben estar representados con respecto al sistema X', Y'



De esta última representación, los elementos mecánicos de la barra {f} se determinan de la expresión $\{f\} = [k]\{\delta'\}$, en donde $\{\delta'\}$ es el vector

$$\{\delta'\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\Delta_2 \\ \Delta_1 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix}$$

Ahora, mediante la aplicación de la transformación de coordenadas del sistema global al sistema local (el sistema local se encuentra girado 90° en sentido antihorario con respecto al sistema global, por lo que $\cos(-90)=0$, $\sin(-90)=-1$):

$$\{\delta'\} = [T]^T \{\delta\}$$

$$\{\delta'\} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\Delta_2 \\ \Delta_1 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix}$$

Transformación de la matriz de rigidez

Se planteó anteriormente que la determinación de las fuerzas en los extremos de las barras, se lleva a cabo mediante la operación $\{f\}=[k']\{\delta'\}$, en donde todo el sistema de referencia es local, es decir, las fuerzas, los desplazamientos y las rigideces, están referidas al sistema de coordenadas locales. Si la barra presentara una inclinación α (ó rotación θ), positiva en sentido horario, entónces el sistema de referencia debe ser el sistema de coordenadas globales, por lo que habrá que efectuar una transformación de coordenadas, tanto para los vectores de desplazamiento y carga, como para la matriz de rigidez:

Sabemos que $\{\delta'\}=[T]^T\{\delta\}$ y que de manera similar, es posible obtener $\{f\}=[T]\{f'\}$, de donde podemos decir que $\{f'\}=[T]^T\{f\}$.

Al sustituir $\{f'\}$ y ordenando términos en $\{f'\}=[k']\{\delta'\}$

$$[T]^T\{f\}=[k'] [T]^T\{\delta\}$$

premultiplicando esta última expresión por $[T]$:

$$\begin{aligned} [T][T]^T\{f\} &= [T][k'] [T]^T\{\delta\} \\ \{f\} &= [T] [k'] [T]^T\{\delta\} \end{aligned}$$

O bien,

$$\{f\}=[K]\{\delta\}$$

en donde

$$[K]=[T] [k'] [T]^T$$

El vector $\{f\}$, es un vector de fuerzas en los extremos de la barra referido al sistema global de referencia y la matriz $[K]$ es la matriz de rigidez de la barra referida al sistema global de coordenadas. Esta representación en el sistema global, resulta muy conveniente, ya que los desplazamientos y rigideces a lo largo de la barra, estarán referidos al eje global "x" y los desplazamientos y rigideces de la barra, en dirección transversal al eje de la barra, estarán referidos al eje global "y".

Al efectuar las operaciones para obtener la matriz de rigidez en coordenadas globales, se tiene, como matriz $[K]$:

$$\begin{bmatrix} \left(C^2 \frac{EA}{L} + S^2 \frac{12EI}{L^3}\right) & \left(CS \frac{EA}{L} - CS \frac{12EI}{L^3}\right) & -\left(S \frac{6EI}{L^2}\right) & \left(-C^2 \frac{EA}{L} - S^2 \frac{12EI}{L^3}\right) & \left(-CS \frac{EA}{L} + CS \frac{12EI}{L^3}\right) & -\left(S \frac{6EI}{L^2}\right) \\ \left(CS \frac{EA}{L} - CS \frac{12EI}{L^3}\right) & \left(S^2 \frac{EA}{L} + C^2 \frac{12EI}{L^3}\right) & \left(+C \frac{6EI}{L^2}\right) & \left(-CS \frac{EA}{L} + CS \frac{12EI}{L^3}\right) & \left(-S^2 \frac{EA}{L} - C^2 \frac{12EI}{L^3}\right) & \left(+C \frac{6EI}{L^2}\right) \\ -\left(S \frac{6EI}{L^2}\right) & \left(+C \frac{6EI}{L^2}\right) & \left(\frac{4EI}{L}\right) & \left(+S \frac{6EI}{L^2}\right) & -\left(C \frac{6EI}{L^2}\right) & \left(\frac{2EI}{L}\right) \\ \left(-C^2 \frac{EA}{L} - S^2 \frac{12EI}{L^3}\right) & \left(-CS \frac{EA}{L} + CS \frac{12EI}{L^3}\right) & \left(+S \frac{6EI}{L^2}\right) & \left(C^2 \frac{EA}{L} + S^2 \frac{12EI}{L^3}\right) & \left(CS \frac{EA}{L} - CS \frac{12EI}{L^3}\right) & \left(+S \frac{6EI}{L^2}\right) \\ \left(-CS \frac{EA}{L} + CS \frac{12EI}{L^3}\right) & \left(-S^2 \frac{EA}{L} - C^2 \frac{12EI}{L^3}\right) & -\left(C \frac{6EI}{L^2}\right) & \left(CS \frac{EA}{L} - CS \frac{12EI}{L^3}\right) & \left(S^2 \frac{EA}{L} + C^2 \frac{12EI}{L^3}\right) & -\left(C \frac{6EI}{L^2}\right) \\ -\left(S \frac{6EI}{L^2}\right) & \left(+C \frac{6EI}{L^2}\right) & \left(\frac{2EI}{L}\right) & \left(+S \frac{6EI}{L^2}\right) & -\left(C \frac{6EI}{L^2}\right) & \left(\frac{4EI}{L}\right) \end{bmatrix}$$

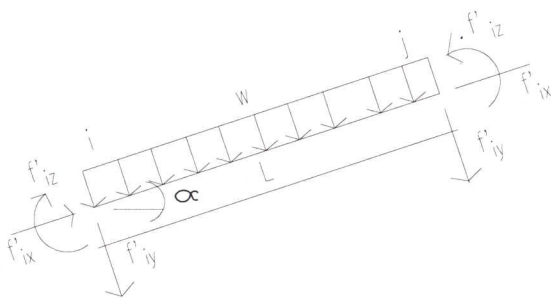
En donde $C=\cos\alpha$ y $S=\sin\alpha$

Transformación de coordenadas del vector de cargas externas

El mismo planteamiento desarrollado anteriormente, para la transformación de coordenadas en el vector de desplazamientos, es aplicable al caso de la transformación de coordenadas del vector de cargas externas, en los extremos de cada una de las barras en la estructura. Este vector de cargas externas en los extremos de cada una de las barras, estará determinando la condición de carga aplicada directamente sobre los nodos, por lo que estará referido al sistema local de coordenadas (si la carga se aplica en el claro, deberá transportarse la carga a los nodos como cargas concentradas), para llevar a cabo el análisis de la estructura, el vector deberá estar referido al sistema global de coordenadas:

$$\{f\}=[T]\{f'\}$$

Así, para una barra con inclinación α , sometida a una condición de carga uniformemente distribuida en todo el claro:



$$\{f'\} = \begin{Bmatrix} f'_{ix} \\ f'_{iy} \\ f'_{iz} \\ f'_{jx} \\ f'_{jy} \\ f'_{jz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{wl}{2} \\ \frac{wl^2}{12} \\ 0 \\ \frac{wl}{2} \\ -\frac{wl^2}{12} \end{Bmatrix}$$

En el caso de que el sistema de cargas aplicado a la estructura, sea una combinación de cargas en los nodos, con cargas aplicadas sobre los elementos de la estructura, será necesario entonces “ensamblar” el vector de fuerzas $\{f\}$ de la siguiente manera:

$$\{f\}=[T]\{f'\}+\{f_{\text{nodos}}\}$$

en donde el vector $\{f_{\text{nodos}}\}$ corresponde a las cargas aplicadas directamente sobre los nodos, las cuales estarán ya referidas al sistema de coordenadas globales.

Matriz de rigidez en coordenadas globales de cada uno de los elementos de la estructura:

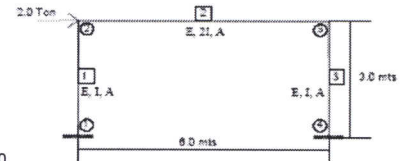
Columna [1]

C= 0
S= -1

E= 1
L= 3

A= 1
I= 1

	0	0	0	$\Delta 1$	$\Delta 2$	$\Delta 3$	
K1=	0.444	0.000	0.667	-0.444	0.000	0.667	0
	0.000	0.333	0.000	0.000	-0.333	0.000	0
	0.667	0.000	1.333	-0.667	0.000	0.667	0
	-0.444	0.000	-0.667	0.444	0.000	-0.667	$\Delta 1$
	0.000	-0.333	0.000	0.000	0.333	0.000	$\Delta 2$
	0.667	0.000	0.667	-0.667	0.000	1.333	$\Delta 3$



Viga [2]

C= 1
S= 0

E= 1
L= 6

A= 1
I= 2

	$\Delta 1$	$\Delta 2$	$\Delta 3$	$\Delta 4$	$\Delta 5$	$\Delta 6$	
K2=	0.167	0.000	0.000	-0.167	0.000	0.000	$\Delta 1$
	0.000	0.111	0.333	0.000	-0.111	0.333	$\Delta 2$
	0.000	0.333	1.333	0.000	-0.333	0.667	$\Delta 3$
	-0.167	0.000	0.000	0.167	0.000	0.000	$\Delta 4$
	0.000	-0.111	-0.333	0.000	0.111	-0.333	$\Delta 5$
	0.000	0.333	0.667	0.000	-0.333	1.333	$\Delta 6$

Columna [3]

C= 0
S= 1

E= 1
L= 3

A= 1
I= 1

	$\Delta 4$	$\Delta 5$	$\Delta 6$	0	0	0	
K3=	0.444	0.000	-0.667	-0.444	0.000	-0.667	$\Delta 4$
	0.000	0.333	0.000	0.000	-0.333	0.000	$\Delta 5$
	-0.667	0.000	1.333	0.667	0.000	0.667	$\Delta 6$
	-0.444	0.000	0.667	0.444	0.000	0.667	0
	0.000	-0.333	0.000	0.000	0.333	0.000	0
	-0.667	0.000	0.667	0.667	0.000	1.333	0

Matriz de rigidez ensamblada:

	$\Delta 1$	$\Delta 2$	$\Delta 3$	$\Delta 4$	$\Delta 5$	$\Delta 6$	
Kglob=	0.611	0.000	-0.667	-0.167	0.000	0.000	$\Delta 1$
	0.000	0.444	0.333	0.000	-0.111	0.333	$\Delta 2$
	-0.667	0.333	2.667	0.000	-0.333	0.667	$\Delta 3$
	-0.167	0.000	0.000	0.611	0.000	-0.667	$\Delta 4$
	0.000	-0.111	-0.333	0.000	0.444	-0.333	$\Delta 5$
	0.000	0.333	0.667	-0.667	-0.333	2.667	$\Delta 6$

Inversa de la matriz de rigidez para resolver el sistema de ecuaciones

Kglobinv=	2.76E+00	-5.87E-01	7.89E-01	9.59E-01	5.87E-01	1.89E-01
	-5.87E-01	2.87E+00	-3.91E-01	-5.87E-01	1.30E-01	-3.91E-01
	7.89E-01	-3.91E-01	6.76E-01	1.89E-01	3.91E-01	-2.39E-02
	9.59E-01	-5.87E-01	1.89E-01	2.76E+00	5.87E-01	7.89E-01
	5.87E-01	1.30E-01	3.91E-01	5.87E-01	2.87E+00	3.91E-01
	1.89E-01	-3.91E-01	-2.39E-02	7.89E-01	3.91E-01	6.76E-01

Ensamble de el vector de fuerzas aplicadas (en coordenadas globales)

Fglob=	2.0	$\Delta 1$
	0.0	$\Delta 2$
	0.0	$\Delta 3$
	0.0	$\Delta 4$
	0.0	$\Delta 5$
	0.0	$\Delta 6$

Solución de el sistema de ecuaciones (desplazamientos de los nodos en coordenadas globales)

δ =	5.517	$\Delta 1$
	-1.174	$\Delta 2$
	1.578	$\Delta 3$
	1.917	$\Delta 4$
	1.174	$\Delta 5$
	0.378	$\Delta 6$

Fuerzas en los extremos de cada una de los elementos de la estructura

Columna [1]

C= 0
S= -1

E= 1
L= 3

A= 1
I= 1

Desplazamiento de la barra en coordenadas locales:

$$\Delta 1 = T T^* \delta 1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 5.517 \\ -1.174 \\ 1.578 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 1.174 \\ 5.517 \\ 1.578 \end{bmatrix}$$

Fuerzas en los extremos de la barra

$$P 1 = k^* \Delta 1 - f 1 = \begin{bmatrix} 0.333 & 0.000 & 0.000 & -0.333 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.444 & 0.667 & 0.000 & -0.444 & 0.667 \\ 0.000 & 0.667 & 1.333 & 0.000 & -0.667 & 0.667 \\ -0.333 & 0.000 & 0.000 & 0.333 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -0.444 & -0.667 & 0.000 & 0.444 & -0.667 \\ 0.000 & 0.667 & 0.667 & 0.000 & -0.667 & 1.333333333 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 1.174 \\ 5.517 \\ 1.578 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.391 \\ -1.400 \\ -2.626 \\ 0.391 \\ 1.400 \\ -1.574 \end{bmatrix}$$

Viga [2]

C= 1
S= 0

E= 1
L= 6

A= 1
I= 2

Desplazamiento de la barra en coordenadas locales:

$$\Delta 2 = T T^* \delta 2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5.517 \\ -1.174 \\ 1.578 \\ 1.917 \\ 1.174 \\ 0.378 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.517 \\ -1.174 \\ 1.578 \\ 1.917 \\ 1.174 \\ 0.378 \end{bmatrix}$$

Fuerzas en los extremos de la barra

$$P 2 = k^* \Delta 2 - f 2 = \begin{bmatrix} 0.167 & 0.000 & 0.000 & -0.167 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.111 & 0.333 & 0.000 & -0.111 & 0.333 \\ 0.000 & 0.333 & 1.333 & 0.000 & -0.333 & 0.667 \\ -0.167 & 0.000 & 0.000 & 0.167 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -0.111 & -0.333 & 0.000 & 0.111 & -0.333 \\ 0.000 & 0.333 & 0.667 & 0.000 & -0.333 & 1.333333333 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5.517 \\ -1.174 \\ 1.578 \\ 1.917 \\ 1.174 \\ 0.378 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.600 \\ 0.391 \\ 1.574 \\ -0.600 \\ -0.391 \\ 0.774 \end{bmatrix}$$

Columna [3]

C= 0
S= 1

E= 1
L= 3

A= 1
I= 1

Desplazamiento de la barra en coordenadas locales:

$$\Delta 2 = T T^* \delta 2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1.917 \\ 1.174 \\ 0.378 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.174 \\ -1.917 \\ 0.378 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{bmatrix}$$

Fuerzas en los extremos de la barra

$$P 2 = k^* \Delta 2 - f 2 = \begin{bmatrix} 0.333 & 0.000 & 0.000 & -0.333 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.444 & 0.667 & 0.000 & -0.444 & 0.667 \\ 0.000 & 0.667 & 1.333 & 0.000 & -0.667 & 0.667 \\ -0.333 & 0.000 & 0.000 & 0.333 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -0.444 & -0.667 & 0.000 & 0.444 & -0.667 \\ 0.000 & 0.667 & 0.667 & 0.000 & -0.667 & 1.333333333 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1.174 \\ -1.917 \\ 0.378 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.391 \\ -0.600 \\ -0.774 \\ -0.391 \\ 0.600 \\ -1.026 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez en coordenadas globales de cada uno de los elementos de la estructura:

EJEMPLO CON ELEMENTO
DIAGONAL PARA CONTROLAR
DESPLAZAMIENTO LATERAL

Columna [1]

C= 0	E= 1	A= 1
S= -1	L= 3	I= 1
0	0	0
0.444	0.000	0.667
0.000	0.333	0.000
0.667	0.000	1.333
-0.444	0.000	-0.667
0.000	-0.333	0.000
0.667	0.000	0.667

Viga [2]

C= 1	E= 1	A= 1
S= 0	L= 6	I= 2
Δ1	Δ2	Δ3
0.167	0.000	0.000
0.000	0.111	0.333
0.000	0.333	1.333
-0.167	0.000	0.000
0.000	-0.111	-0.333
0.000	0.333	0.667

Columna [3]

C= 0	E= 1	A= 1
S= 1	L= 3	I= 1
Δ4	Δ5	Δ6
0.444	0.000	-0.667
0.000	0.333	0.000
-0.667	0.000	1.333
-0.444	0.000	0.667
0.000	-0.333	0.000
-0.667	0.000	0.667

Diagonal [4]

C= 0.9021	E= 1	A= 0.25
S= -0.4315	L= 6	I= 0
0	0	0
0.034	-0.016	0.000
-0.016	0.008	0.000
0.000	0.000	0.000
-0.034	0.016	0.000
0.016	-0.008	0.000
0.000	0.000	0.000

Matriz de rigidez ensamblada:

Δ1	Δ2	Δ3	Δ4	Δ5	Δ6
0.611	0.000	-0.667	-0.167	0.000	0.000
0.000	0.444	0.333	0.000	-0.111	0.333
-0.667	0.333	2.667	0.000	-0.333	0.667
-0.167	0.000	0.000	0.645	-0.016	-0.667
0.000	-0.111	-0.333	-0.016	0.452	-0.333
0.000	0.333	0.667	-0.667	-0.333	2.667

Inversa de la matriz de rigidez para resolver el sistema de ecuaciones

2.74E+00	-5.73E-01	7.89E-01	9.07E-01	6.03E-01	1.77E-01
-5.73E-01	2.86E+00	-3.91E-01	-5.37E-01	1.15E-01	-3.79E-01
7.89E-01	-3.91E-01	6.76E-01	1.89E-01	3.91E-01	-2.39E-02
9.07E-01	-5.37E-01	1.89E-01	2.57E+00	6.47E-01	7.43E-01
6.03E-01	1.15E-01	3.91E-01	6.47E-01	2.85E+00	4.06E-01
1.77E-01	-3.79E-01	-2.39E-02	7.43E-01	4.06E-01	6.65E-01

Ensamble de el vector de fuerzas aplicadas (en coordenadas globales)

2.0	Δ1
0.0	Δ2
0.0	Δ3
0.0	Δ4
0.0	Δ5
0.0	Δ6

Solución de el sistema de ecuaciones (desplazamientos de los nodos en coordenadas globales)

5.489	Δ1
-1.147	Δ2
1.578	Δ3
1.814	Δ4
1.207	Δ5
0.353	Δ6

Fuerzas en los extremos de cada una de los elementos de la estructura

Columna [1]

C= 0 E= 1 A= 1
S= -1 L= 3 I= 1

Desplazamiento de la barra en coordenadas locales:

$$\Delta 1 = TT^* \delta 1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 5.489 \\ -1.147 \\ 1.578 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 1.147 \\ 1.387 \\ 1.578 \end{vmatrix}$$

Fuerzas en los extremos de la barra

$$P1 = k^* \Delta 1 - f1 = \begin{vmatrix} 0.333 & 0.000 & 0.000 & -0.333 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.444 & 0.667 & 0.000 & -0.444 & 0.667 \\ 0.000 & 0.667 & 1.333 & 0.000 & -0.667 & 0.667 \\ -0.333 & 0.000 & 0.000 & 0.333 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -0.444 & -0.667 & 0.000 & 0.444 & -0.667 \\ 0.000 & 0.667 & 0.667 & 0.000 & -0.667 & 1.333333333 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 1.147 \\ 1.387 \\ 1.578 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.382 \\ -1.387 \\ -2.607 \\ 0.382 \\ 1.387 \\ -1.555 \end{vmatrix}$$

Viga [2]

C= 1 E= 1 A= 1
S= 0 L= 6 I= 2

Desplazamiento de la barra en coordenadas locales:

$$\Delta 2 = TT^* \delta 2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 5.489 \\ -1.147 \\ 1.578 \\ 1.814 \\ 1.207 \\ 0.353 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5.489 \\ -1.147 \\ 1.578 \\ 1.814 \\ 1.207 \\ 0.353 \end{vmatrix}$$

Fuerzas en los extremos de la barra

$$P2 = k^* \Delta 2 - f2 = \begin{vmatrix} 0.167 & 0.000 & 0.000 & -0.167 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.111 & 0.333 & 0.000 & -0.111 & 0.333 \\ 0.000 & 0.333 & 1.333 & 0.000 & -0.333 & 0.667 \\ -0.167 & 0.000 & 0.000 & 0.167 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -0.111 & -0.333 & 0.000 & 0.111 & -0.333 \\ 0.000 & 0.333 & 0.667 & 0.000 & -0.333 & 1.333333333 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 5.489 \\ -1.147 \\ 1.578 \\ 1.814 \\ 1.207 \\ 0.353 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.613 \\ 0.382 \\ 1.555 \\ -0.613 \\ -0.382 \\ 0.738 \end{vmatrix}$$

Columna [3]

C= 0 E= 1 A= 1
S= 1 L= 3 I= 1

Desplazamiento de la barra en coordenadas locales:

$$\Delta 2 = TT^* \delta 2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1.814 \\ 1.207 \\ 0.353 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.207 \\ -1.814 \\ 0.353 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{vmatrix}$$

Fuerzas en los extremos de la barra

$$P2 = k^* \Delta 2 - f2 = \begin{vmatrix} 0.333 & 0.000 & 0.000 & -0.333 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.444 & 0.667 & 0.000 & -0.444 & 0.667 \\ 0.000 & 0.667 & 1.333 & 0.000 & -0.667 & 0.667 \\ -0.333 & 0.000 & 0.000 & 0.333 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -0.444 & -0.667 & 0.000 & 0.444 & -0.667 \\ 0.000 & 0.667 & 0.667 & 0.000 & -0.667 & 1.333333333 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1.207 \\ -1.814 \\ 0.353 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.402 \\ -0.571 \\ -0.738 \\ -0.402 \\ 0.571 \\ -0.974 \end{vmatrix}$$

Diagonal [4]

C= 0.9021 E= 1 A= 0.25
S= -0.4315 L= 6 I= 0

Desplazamiento de la barra en coordenadas locales:

$$\Delta 1 = TT^* \delta 1 = \begin{vmatrix} 0.9021 & -0.4315 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4315 & 0.9021 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9021 & -0.4315 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4315 & 0.9021 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 1.814 \\ 1.207 \\ 0.000 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 1.115 \\ 1.871 \\ 0.000 \end{vmatrix}$$

Fuerzas en los extremos de la barra

$$P1 = k^* \Delta 1 - f1 = \begin{vmatrix} 0.042 & 0.000 & 0.000 & -0.042 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.042 & 0.000 & 0.000 & 0.042 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 1.115 \\ 1.871 \\ 0.000 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.046 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.046 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{vmatrix}$$

Matriz de rigidez en coordenadas globales de un elemento estructural sometido a efectos de flexión y carga axial:

$$K(E, A, I, L, C, S) := \begin{bmatrix} \left(C^2 \cdot \frac{EA}{L} + S^2 \cdot \frac{12EI}{L^3}\right) & \left(CS \cdot \frac{EA}{L} - CS \cdot \frac{12EI}{L^3}\right) & -\left(S \cdot \frac{6EI}{L^2}\right) & -\left(C^2 \cdot \frac{EA}{L} + S^2 \cdot \frac{12EI}{L^3}\right) & -\left(CS \cdot \frac{EA}{L} - CS \cdot \frac{12EI}{L^3}\right) & -\left(S \cdot \frac{6EI}{L^2}\right) \\ \left(CS \cdot \frac{EA}{L} - CS \cdot \frac{12EI}{L^3}\right) & \left(S^2 \cdot \frac{EA}{L} + C^2 \cdot \frac{12EI}{L^3}\right) & \left(C \cdot \frac{6EI}{L^2}\right) & -\left(CS \cdot \frac{EA}{L} - CS \cdot \frac{12EI}{L^3}\right) & -\left(S^2 \cdot \frac{EA}{L} + C^2 \cdot \frac{12EI}{L^3}\right) & \left(C \cdot \frac{6EI}{L^2}\right) \\ -\left(S \cdot \frac{6EI}{L^2}\right) & \left(C \cdot \frac{6EI}{L^2}\right) & \left(\frac{4EI}{L}\right) & \left(S \cdot \frac{6EI}{L^2}\right) & -\left(C \cdot \frac{6EI}{L^2}\right) & \left(\frac{2EI}{L}\right) \\ -\left(C^2 \cdot \frac{EA}{L} + S^2 \cdot \frac{12EI}{L^3}\right) & -\left(CS \cdot \frac{EA}{L} - CS \cdot \frac{12EI}{L^3}\right) & \left(S \cdot \frac{6EI}{L^2}\right) & \left(C^2 \cdot \frac{EA}{L} + S^2 \cdot \frac{12EI}{L^3}\right) & \left(CS \cdot \frac{EA}{L} - CS \cdot \frac{12EI}{L^3}\right) & \left(S \cdot \frac{6EI}{L^2}\right) \\ -\left(CS \cdot \frac{EA}{L} - CS \cdot \frac{12EI}{L^3}\right) & -\left(S^2 \cdot \frac{EA}{L} + C^2 \cdot \frac{12EI}{L^3}\right) & -\left(C \cdot \frac{6EI}{L^2}\right) & \left(CS \cdot \frac{EA}{L} - CS \cdot \frac{12EI}{L^3}\right) & \left(S^2 \cdot \frac{EA}{L} + C^2 \cdot \frac{12EI}{L^3}\right) & -\left(C \cdot \frac{6EI}{L^2}\right) \\ -\left(S \cdot \frac{6EI}{L^2}\right) & \left(C \cdot \frac{6EI}{L^2}\right) & \left(\frac{2EI}{L}\right) & \left(S \cdot \frac{6EI}{L^2}\right) & -\left(C \cdot \frac{6EI}{L^2}\right) & \left(\frac{4EI}{L}\right) \end{bmatrix}$$

En esta matriz:

E: Módulo de elasticidad de el material.

A: Area de la sección transversal.

I: Momento de inercia de la sección transversal.

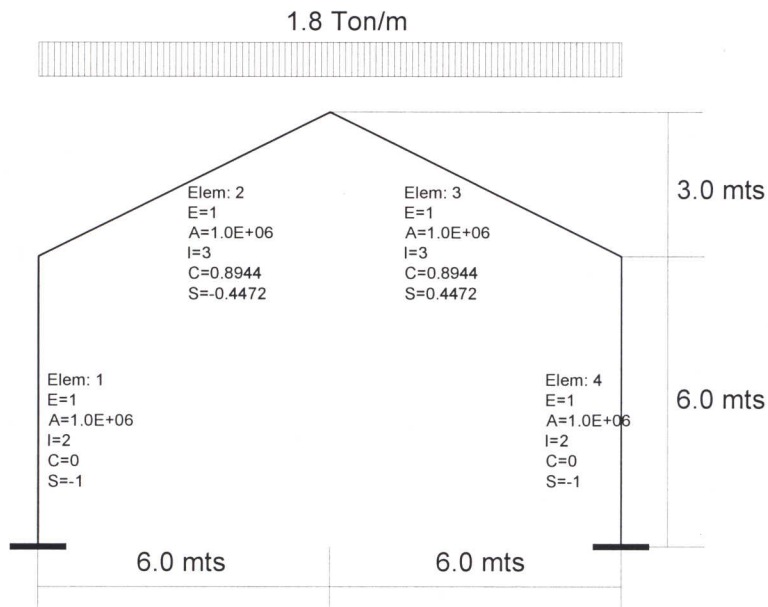
L: Longitud de el elemento

C: Coseno de el ángulo de inclinación de el elemento con respecto a el sistema de coordenadas globales (ángulo positivo en el caso de rotación relativa en sentido horario).

S: Seno de el ángulo de inclinación de el elemento con respecto a el sistema de coordenadas globales (ángulo positivo en el caso de rotación relativa en sentido horario).

Ejercicio de aplicación.

Determinar los desplazamientos de los nodos de el marco mostrado en la figura, así como las fuerzas en los extremos de cada uno de los elementos, aplicando el Método Matricial de Rigideces.



Utilizando los valores de las propiedades correspondientes a cada uno de los elementos que forman el marco, la matriz de rigidez global de estos elementos, es:

Columna [1]:

$$C := 0 \quad E := 1 \quad A := 1000000 \quad L := 6$$

$$S := -1 \quad I := 2$$

$$K1 := K(E, A, I, L, C, S)$$

$$K1 = \begin{pmatrix} 0.111 & 0 & 0.333 & -0.111 & 0 & 0.333 \\ 0 & 1.667 \times 10^5 & 0 & 0 & -1.667 \times 10^5 & 0 \\ 0.333 & 0 & 1.333 & -0.333 & 0 & 0.667 \\ -0.111 & 0 & -0.333 & 0.111 & 0 & -0.333 \\ 0 & -1.667 \times 10^5 & 0 & 0 & 1.667 \times 10^5 & 0 \\ 0.333 & 0 & 0.667 & -0.333 & 0 & 1.333 \end{pmatrix}$$

Viga [2]:

$$C := 0.8944 \quad E := 1 \quad A := 1000000 \quad L := 6.708$$

$$S := -0.4472 \quad I := 3$$

$$K2 := K(E, A, I, L, C, S)$$

$$K2 = \begin{pmatrix} 1.193 \times 10^5 & -5.963 \times 10^4 & 0.179 & -1.193 \times 10^5 & 5.963 \times 10^4 & 0.179 \\ -5.963 \times 10^4 & 2.981 \times 10^4 & 0.358 & 5.963 \times 10^4 & -2.981 \times 10^4 & 0.358 \\ 0.179 & 0.358 & 1.789 & -0.179 & -0.358 & 0.894 \\ -1.193 \times 10^5 & 5.963 \times 10^4 & -0.179 & 1.193 \times 10^5 & -5.963 \times 10^4 & -0.179 \\ 5.963 \times 10^4 & -2.981 \times 10^4 & -0.358 & -5.963 \times 10^4 & 2.981 \times 10^4 & -0.358 \\ 0.179 & 0.358 & 0.894 & -0.179 & -0.358 & 1.789 \end{pmatrix}$$

Viga [3]:

$$C := 0.8944 \quad E := 1 \quad A := 1000000 \quad L := 6.708$$

$$S := 0.4472 \quad I := 3$$

$$K3 := K(E, A, I, L, C, S)$$

$$K3 = \begin{pmatrix} 1.193 \times 10^5 & 5.963 \times 10^4 & -0.179 & -1.193 \times 10^5 & -5.963 \times 10^4 & -0.179 \\ 5.963 \times 10^4 & 2.981 \times 10^4 & 0.358 & -5.963 \times 10^4 & -2.981 \times 10^4 & 0.358 \\ -0.179 & 0.358 & 1.789 & 0.179 & -0.358 & 0.894 \\ -1.193 \times 10^5 & -5.963 \times 10^4 & 0.179 & 1.193 \times 10^5 & 5.963 \times 10^4 & 0.179 \\ -5.963 \times 10^4 & -2.981 \times 10^4 & -0.358 & 5.963 \times 10^4 & 2.981 \times 10^4 & -0.358 \\ -0.179 & 0.358 & 0.894 & 0.179 & -0.358 & 1.789 \end{pmatrix}$$

Columna [4]:

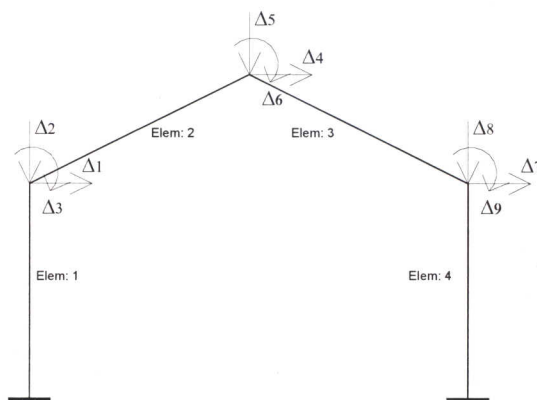
$$C := 0 \quad E := 1 \quad A := 1000000 \quad L := 6.0$$

$$S := -1 \quad I := 2$$

$$K4 := K(E, A, I, L, C, S)$$

$$K4 = \begin{pmatrix} 0.111 & 0 & 0.333 & -0.111 & 0 & 0.333 \\ 0 & 1.667 \times 10^5 & 0 & 0 & -1.667 \times 10^5 & 0 \\ 0.333 & 0 & 1.333 & -0.333 & 0 & 0.667 \\ -0.111 & 0 & -0.333 & 0.111 & 0 & -0.333 \\ 0 & -1.667 \times 10^5 & 0 & 0 & 1.667 \times 10^5 & 0 \\ 0.333 & 0 & 0.667 & -0.333 & 0 & 1.333 \end{pmatrix}$$

De acuerdo con los posibles grados de libertad considerados en el marco (nótese que, aunque la magnitud de el área de las secciones transversales utilizadas es alta, con la finalidad de no considerar el efecto por acortamiento de la longitud de los elementos, los tres grados de libertad por nodo han sido planteados como posibles desplazamientos):



La matriz global de la estructura (en cordenadas globales) se “ensambla” considerando la contribución de cada uno de los elementos estructurales, a la rigidez en la dirección de cada uno de los posibles grados de desplazamiento considerados en los nodos.

- El elemento 1 (columna izquierda), tiene apoyo empotrado en la base y posibilidad de desplazamiento Δ_1 , Δ_2 y Δ_3 en el extremo superior.
- El elemento 2 (viga izquierda), tiene posibilidad de desplazamiento Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 , Δ_4 , Δ_5 y Δ_6 en los extremos.
- El elemento 3 (viga derecha), tiene posibilidad de desplazamiento Δ_4 , Δ_5 , Δ_6 , Δ_7 , Δ_8 y Δ_9 en los extremos.
- El elemento 4 (columna derecha), tiene apoyo empotrado en la base y posibilidad de desplazamiento Δ_7 , Δ_8 y Δ_9 en el extremo superior.

De aquí, que la rigidez de la estructura a el grado de desplazamiento Δ_1 , corresponda a la sumatoria de las rigideces de la columna (elemento 1) y la viga (elemento 2) asociadas a ese mismo grado de libertad. De manera similar se considera la aportación de rigidez en los grados de desplazamiento restantes, dando como resultado la siguiente matriz de rigidez para el marco:

$$K_{glob} := \begin{bmatrix} (K1_{4,4} + K2_{1,1}) & (K1_{4,5} + K2_{1,2}) & (K1_{4,6} + K2_{1,3}) & K2_{1,4} & K2_{1,5} & K2_{1,6} & 0 & 0 & 0 \\ (K1_{5,4} + K2_{2,1}) & (K1_{5,5} + K2_{2,2}) & (K1_{5,6} + K2_{2,3}) & K2_{2,4} & K2_{2,5} & K2_{2,6} & 0 & 0 & 0 \\ (K1_{6,4} + K2_{3,1}) & (K1_{6,5} + K2_{3,2}) & (K1_{6,6} + K2_{3,3}) & K2_{3,4} & K2_{3,5} & K2_{3,6} & 0 & 0 & 0 \\ K2_{4,1} & K2_{4,2} & K2_{4,3} & (K2_{4,4} + K3_{1,1}) & (K2_{4,5} + K3_{1,2}) & (K2_{4,6} + K3_{1,3}) & K3_{1,4} & K3_{1,5} & K3_{1,6} \\ K2_{5,1} & K2_{5,2} & K2_{5,3} & (K2_{5,4} + K3_{2,1}) & (K2_{5,5} + K3_{2,2}) & (K2_{5,6} + K3_{2,3}) & K3_{2,4} & K3_{2,5} & K3_{2,6} \\ K2_{6,1} & K2_{6,2} & K2_{6,3} & (K2_{6,4} + K3_{3,1}) & (K2_{6,5} + K3_{3,2}) & (K2_{6,6} + K3_{3,3}) & K3_{3,4} & K3_{3,5} & K3_{3,6} \\ 0 & 0 & 0 & K3_{4,1} & K3_{4,2} & K3_{4,3} & (K3_{4,4} + K4_{4,4}) & (K3_{4,5} + K4_{4,5}) & (K3_{4,6} + K4_{4,6}) \\ 0 & 0 & 0 & K3_{5,1} & K3_{5,2} & K3_{5,3} & (K3_{5,4} + K4_{5,4}) & (K3_{5,5} + K4_{5,5}) & (K3_{5,6} + K4_{5,6}) \\ 0 & 0 & 0 & K3_{6,1} & K3_{6,2} & K3_{6,3} & (K3_{6,4} + K4_{6,4}) & (K3_{6,5} + K4_{6,5}) & (K3_{6,6} + K4_{6,6}) \end{bmatrix}$$

De acuerdo con la condición de carga aplicada en el marco (gravitacional), se determina el vector de las cargas actuando en los extremos de cada uno de los elementos. Este vector se determina en coordenadas locales (considerando la componente de carga actuando en la dirección transversal a el eje de los elementos), posteriormente se efectúa la transformación correspondiente, para obtener las componentes de estas fuerzas en las direcciones de los desplazamientos considerados como posibles grados de libertad de el marco.

El vector de fuerzas en las extremos de cada uno de los elementos, queda representado de la siguiente manera:

$$f1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f2 := \begin{pmatrix} -2.415 \\ 4.83 \\ 5.4 \\ -2.415 \\ 4.83 \\ -5.4 \end{pmatrix} \quad f3 := \begin{pmatrix} 2.415 \\ 4.83 \\ 5.4 \\ 2.415 \\ 4.83 \\ -5.4 \end{pmatrix} \quad f4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de transformación de coordenadas, de un sistema de coordenadas local a un sistema global de coordenadas (considerando la rotación en sentido horario como una rotación positiva):

$$T(C,S) := \begin{pmatrix} C & -S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & -S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se efectúa la transformación de los vectores de carga:

Considerando la inclinación de los elementos 1 y 2 (columna y viga izquierdas):

$$\begin{aligned}
 C &:= 0 \\
 S &:= -1 \\
 F1 &:= T(C, S) \cdot f1 \\
 F2 &:= T(C, S) \cdot f2
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{aligned}
 F1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 F2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 5.4 \\ 5.4 \\ 0 \\ 5.4 \\ -5.4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{aligned}
 C &:= 0.8944 \\
 S &:= -0.4472
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{aligned}
 F2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 5.4 \\ 5.4 \\ 0 \\ 5.4 \\ -5.4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Considerando la inclinación de los elementos 3 y 4 (viga y columna derechas):

$$\begin{aligned}
 C &:= 0.8944 \\
 S &:= 0.4472 \\
 F3 &:= T(C, S) \cdot f3 \\
 F4 &:= T(C, S) \cdot f4
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{aligned}
 F3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 5.4 \\ 5.4 \\ 0 \\ 5.4 \\ -5.4 \end{pmatrix} \\
 F4 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{aligned}
 C &:= 0 \\
 S &:= -1 \\
 F4 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

El vector de fuerzas en las direcciones de los grados de libertad considerados, se ensambla utilizando las fuerzas en los extremos de las barras que actúan en cada una de las direcciones de desplazamiento de los nodos:

$$\begin{aligned}
 F_{glob} &:= \begin{pmatrix} F1_4 + F2_1 \\ F1_5 + F2_2 \\ F1_6 + F2_3 \\ F2_4 + F3_1 \\ F2_5 + F3_2 \\ F2_6 + F3_3 \\ F3_4 + F4_4 \\ F3_5 + F4_5 \\ F3_6 + F4_6 \end{pmatrix} \\
 F_{glob} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 5.4 \\ 5.4 \\ 0 \\ 10.8 \\ 0 \\ 0 \\ 5.4 \\ -5.4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones, encontrando de esta manera el vector de desplazamientos en los nodos:

$$\begin{aligned}
 \delta &:= K_{glob}^{-1} \cdot F_{glob} \\
 \delta &= \begin{pmatrix} -19.405 \\ 0 \\ 5.217 \\ 0 \\ 38.81 \\ 0 \\ 19.405 \\ 0 \\ -5.217 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Una vez obtenidos los desplazamientos en los nodos, se procede a determinar las fuerzas en los extremos de cada uno de los elementos que forman el marco. Para esto es necesario transformar el vector de desplazamientos de los nodos, de el sistema de coordenadas globales a sistema de coordenadas locales, posteriormente se multiplica la matriz de rigidez de cada uno de los elementos por el correspondiente vector de desplazamiento, ambos correspondientes a el sistema de coordenadas locales.

Matriz de rigidéz en coordenadas locales:

$$k(E, A, I, L) := \begin{pmatrix} \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & -\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \\ -\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \end{pmatrix}$$

Columna [1]:

$$\begin{aligned} C &:= 0 & E &:= 1 & A &:= 1000000 & L &:= 6 \\ S &:= -1 & I &:= 2 \end{aligned}$$

$$\delta l := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix}$$

$$\delta l = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -19.405 \\ 0 \\ 5.217 \end{pmatrix}$$

Vector de desplazamientos en coordenadas locales:

$$\Delta l := T(C, S)^T \cdot \delta l$$

$$\Delta l = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0 \\ -19.405 \\ 5.217 \end{pmatrix}$$

Vector de fuerzas en los extremos de el elemento:

$$P l := k(E, A, I, L) \cdot \Delta l - f l$$

$$P l = \begin{pmatrix} 10.8 \\ 3.895 \\ 9.946 \\ -10.8 \\ -3.895 \\ 13.424 \end{pmatrix}$$

Viga [2]:

$$C := 0.8944 \quad E := 1 \quad A := 1000000 \quad L := 6.708$$

$$S := -0.4472 \quad I := 3$$

$$\delta_2 := \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{pmatrix} \quad \delta_2 = \begin{pmatrix} -19.405 \\ 0 \\ 5.217 \\ 0 \\ 38.81 \\ -0 \end{pmatrix}$$

Vector de desplazamientos en coordenadas locales:

$$\Delta_2 := T(C, S)^T \cdot \delta_2$$

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} -17.356 \\ -8.678 \\ 5.217 \\ -17.356 \\ 34.711 \\ -0 \end{pmatrix}$$

Vector de fuerzas en los extremos de el elemento:

$$P_2 := k(E, A, I, L) \cdot \Delta_2 - f_2$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 8.314 \\ -7.918 \\ -13.424 \\ -3.484 \\ -1.742 \\ -7.29 \end{pmatrix}$$

Viga [3]:

$$C := 0.8944 \quad E := 1 \quad A := 1000000 \quad L := 6.708$$

$$S := 0.4472 \quad I := 3$$

$$\delta_3 := \begin{pmatrix} \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \end{pmatrix} \quad \delta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 38.81 \\ -0 \\ 19.405 \\ 0 \\ -5.217 \end{pmatrix}$$

Vector de desplazamientos en coordenadas locales:

$$\Delta_3 := T(C, S)^T \cdot \delta_3$$

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} 17.356 \\ 34.711 \\ -0 \\ 17.356 \\ -8.678 \\ -5.217 \end{pmatrix}$$

Vector de fuerzas en los extremos de el elemento:

$$P_3 := k(E, A, I, L) \cdot \Delta_3 - f_3$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 3.484 \\ -1.742 \\ 7.29 \\ -8.314 \\ -7.918 \\ 13.424 \end{pmatrix}$$

Columna [4]:

$$\begin{array}{llll} C := 0 & E := 1 & A := 1000000 & L := 6 \\ S := -1 & I := 2 & & \end{array}$$

$$\delta 4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \end{pmatrix} \qquad \delta 4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 19.405 \\ 0 \\ -5.217 \end{pmatrix}$$

Vector de desplazamientos en coordenadas locales:

$$\Delta 4 := T(C, S)^T \cdot \delta 4 \qquad \Delta 4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0 \\ 19.405 \\ -5.217 \end{pmatrix}$$

Vector de fuerzas en los extremos de el elemento:

$$P 4 := k(E, A, I, L) \cdot \Delta 4 - f 4 \qquad P 4 = \begin{pmatrix} 10.8 \\ -3.895 \\ -9.946 \\ -10.8 \\ 3.895 \\ -13.424 \end{pmatrix}$$